

2015



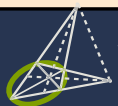
Escuela de matemática  
Instituto Tecnológico de Costa Rica

# CÁLCULO <sup>EN</sup> VARIAS VARIABLES

PDF con Animaciones 3D

1ra edición

Walter Mora F.



Revista digital

Matemática, Educación e *Internet* <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/>

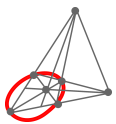
**Walter Mora F.**

**PDF Interactivo**

# Cálculo en Varias Variables

Puede ver y manipular las figuras en 3D haciendo clic sobre ellas (necesita una conexión a Internet)

Primera edición



Revista digital

**Matemática, Educación e Internet.** (<http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>).



Copyright© Revista digital Matemática Educación e Internet ([www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/](http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/)).  
Correo Electrónico: [wmora2@itcr.ac.cr](mailto:wmora2@itcr.ac.cr)  
Escuela de Matemática  
Instituto Tecnológico de Costa Rica  
Apdo. 159-7050, Cartago  
Teléfono (506)25502225  
Fax (506)25502493

Mora Flores, Walter.  
Cálculo en Varias Variables. 1ra ed.  
– Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2012.  
396 pp.  
ISBN Obra Independiente: 978-9968-641-12-8  
1. Cálculo. 2. Integral doble y triple 3. Integral de línea y superficie.

Derechos reservados © 2013


Revista digital

**Matemática, Educación e Internet.**

<http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>.

**Photos by:** Viviana Loaiza. Parque Nacional Chirripó, Costa Rica.

Licencia Creative Commons Reconocimiento - No Comercial 3.0 Unported Licence (la “Licencia”). Usted puede utilizar este archivo de conformidad con la Licencia. Usted puede obtener una copia de la Licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. A menos que lo requiera la ley aplicable o se acuerde por escrito, el software distribuido bajo la Licencia se distribuye “*tal y como está*”, sin garantías ni condiciones de ningún tipo, ya sea expresa o implícita.



# Índice general

Prólogo 8

<b>1</b>	<b>Secciones Cónicas .....</b>	<b>11</b>
1.1	Introducción.	11
1.2	Preliminares	13
1.3	La Parábola	15
1.4	La Elipse	23
1.5	La Hipérbola.	32
1.6	Cónicas y la ecuación de segundo grado	40
<b>2</b>	<b>Superficies y Sólidos. ....</b>	<b>43</b>
2.1	Espacio tridimensional. Coordenadas cartesianas.	43
2.2	Funciones de dos variables	46
2.3	Superficies en $\mathbb{R}^3$	50
2.4	Superficies cuadráticas.	62
2.5	Sólidos simples	75
2.6	Proyección ortogonal de un sólido simple	88
2.7	(*) Definición formal de una superficie	98
<b>3</b>	<b>Cálculo diferencial en varias variables .....</b>	<b>101</b>
3.1	Introducción	101

3.2	Derivadas parciales.	102
3.3	Derivadas parciales de orden superior	105
3.4	Función diferenciable. Diferencial total.	111
3.5	Regla de la cadena.	112
3.6	Derivadas de una función definida de manera implícita.	117
3.7	(*) Derivación implícita: Caso de dos ecuaciones.	120
3.8	Gradiente.	123
3.9	Gradiente, curvas y superficies de nivel.	125
3.10	Derivada direccional	128
3.11	Plano tangente y el vector normal.	134
<b>4</b>	<b>Máximos y mínimos locales. ....</b>	<b>143</b>
4.1	Introducción	143
4.2	Máximos y mínimos locales en varias variables.	144
4.3	Puntos críticos y extremos locales	145
4.4	Clasificación de puntos críticos	145
4.5	Clasificación de puntos críticos en el caso de dos variables.	147
4.6	Extremos con restricciones: Multiplicadores de Lagrange	152
4.7	(*) Criterio de clasificación para puntos críticos en 3 variables o más.	159
4.8	(*) Extremos globales. Condiciones de Kuhn-Tucker.	169
<b>5</b>	<b>Integral doble e integral triple. ....</b>	<b>175</b>
5.1	Integral doble.	175
5.2	Cálculo de integrales dobles. Integral iterada.	177
5.3	Área y Volumen	182
5.4	Cambio de variable en una integral doble.	190
5.5	Coordenadas Polares.	196
5.6	Integral triple.	210
5.7	Cambio de variables en integral triple.	218
5.8	Coordenadas cilíndricas.	220
5.9	(*)Coordenadas esféricas.	230
5.9.1	Describiendo Superficies en Coordenadas Esféricas. ....	230
5.9.2	Cambio de variable con coordenadas esféricas. ....	233
5.10	(*)Singularidades.	240



<b>6</b>	<b>Integral de superficie.</b>	<b>245</b>
6.1	Superficies parametrizadas.	245
6.2	Superficies regulares.	246
6.3	Área de una superficie.	247
6.4	Integral sobre una superficie.	254
6.5	Integral de flujo.	265
6.6	Superficies orientables.	271
6.7	Teorema de la Divergencia.	273
<b>7</b>	<b>Integral de línea.</b>	<b>283</b>
7.1	Curvas y parametrizaciones.	283
7.2	Campos escalares y campos vectoriales.	290
7.3	Longitud de una curva.	292
7.4	Integral de línea para campos escalares.	295
7.5	(*)Longitud de arco en coordenadas polares.	299
7.6	Integral de línea de campos vectoriales. Trabajo.	300
7.7	Campos conservativos. Independencia de la trayectoria.	310
7.8	Teorema de Green (en el plano).	318
7.9	Área como una integral de línea.	321
7.10	Teorema de Stokes (Teorema de Green en el espacio).	323
<b>8</b>	<b>Apéndices</b>	<b>335</b>
<b>8.1</b>	<b>Apéndice A: Más sobre cónicas</b>	<b>335</b>
8.1.1	Preliminares: Traslación y rotación de ejes.	336
8.1.2	Estudio de la ecuación general.	339
8.1.3	Invariantes y clasificación de cónicas.	345
8.1.4	Excentricidad: Otra manera de definir las cónicas.	347
8.1.5	Ecuación polar de una cónica.	349
8.1.6	Reconocimiento de cónicas con métodos matriciales.	352
8.1.7	Ecuación paramétrica de una cónica.	353
<b>8.2</b>	<b>Apéndice B: Coordendas Polares</b>	<b>357</b>
8.2.1	Introducción	357
8.2.2	Conversión de coordenadas	359
8.2.3	Curvas en coordenadas polares	362
8.2.4	Graficar en coordenadas polares.	364
8.2.5	Simetría	364

8.2.6	Máximos, ceros y tangentes al polo. . . . .	367
8.2.7	Curvas especiales . . . . .	370

<b>Bibliografía</b>	<b>373</b>
---------------------	------------

<b>9</b>	<b>Soluciones de los ejercicios . . . . .</b>	<b>375</b>
----------	---	------------



## Prólogo

Uno de los objetivos de este libro es la visualización en 3D. La mayoría de figuras en 3D tienen una liga a un applet (debe tener una conexión a Internet), en este applet el lector puede manipular las figuras con el ratón. La idea es visualizar no solo el espacio tridimensional, también poder entrenar en visualizar cortes de superficies, intersecciones y proyecciones de una superficie o un sólido, en algunos de los planos  $XY$ ,  $XZ$  o  $YZ$ . Este conocimiento se aplica después en el cálculo de integrales dobles, triples, de línea y de superficie. Este es un libro para el profesor y el estudiante. Se trata de refrescar con una introducción con la teoría que sustenta los cálculos. Luego se presentan una ejemplos para aprender destrezas de cálculo. Muchos de estos ejemplos han aparecido en exámenes, en el curso de Cálculo Superior del Instituto Tecnológico de Costa Rica. En esta edición se completaron todos los applets y se incluye una introducción intuitiva a los temas de cambio de variable, integrales de línea y superficie, circulación y flujo, divergencia, rotacional y teorema de Stokes.

Esta es una nueva revisión (Enero 2014) en la que cambiaron y/o se mejoraron algunos gráficos, se redistribuyó parte del material y se corrigieron varios errores en algunos enunciados y en los ejemplos.

La plantilla  $\text{\LaTeX}$  de este libro se puede solicitar al autor ([wmora2@itcr.ac.cr](mailto:wmora2@itcr.ac.cr))

*Cartago, Enero 2014.*

W. MORA F.





# 1 — Secciones Cónicas

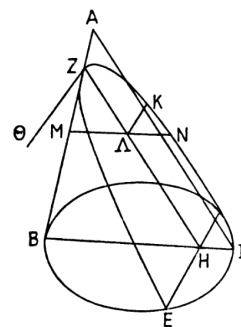
## 1.1 Introducción.

Además de la rectas, los círculos, los planos y las esferas; los griegos se interesaron por las curvas obtenidas como secciones de un cono (parábolas, elipses e hipérbolas). No es totalmente claro el por qué del interés en estas curvas ([15], [13]).

Las referencias que están disponibles parecen relacionar las cónicas con el problema de duplicación del cubo (problema de Delos): Dado un cubo de lados de medida  $s$  y por tanto de volumen  $s^3$ , encontrar un cubo de lados de medida  $x$  y volumen  $2s^3$ . Hay que entender que solo se podía usar las condiciones auto-impuestas en la época: Las construcciones debían hacerse solo con regla (sin marcas) y compás. Hipócrates redujo el problema a un problema de proporciones,

$$s : x = x : y = y : 2s \quad (1.1)$$

De aquí se deduce que los valores  $x, y$  deben estar en la parábola  $x^2 = sy$  y en la hipérbola  $xy = 2s^2$ . La solución se obtiene como la intersección de estas curvas,  $x = \sqrt[3]{2}s$  que es un número que no se puede construir con regla y compás (como se demostró un 2000 años después). En la época griega, estas curvas aparecen como relaciones geométricas.



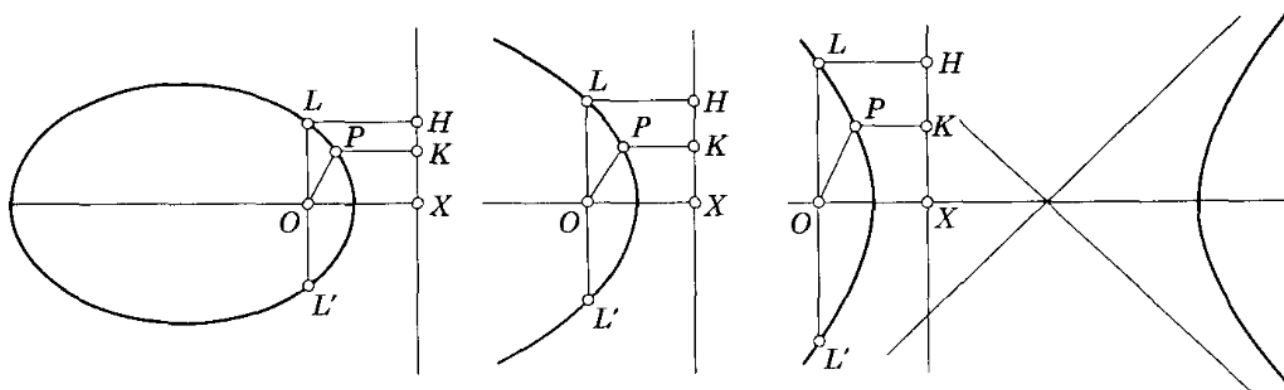
$$K\Lambda^2 = M\Lambda \cdot \Lambda N = Z\Lambda \cdot \frac{BH}{ZH} \cdot H\Gamma = \frac{HE^2}{ZH} \cdot Z\Lambda.$$

**Figura 1.1:** Derivación de la ecuación de la parábola según Apolonio de Perga ([13]).

Menecmo (320 a. C.) parece ser el primero en encontrar estas curvas, en sus esfuerzos por resolver el problema de Delos de manera geométrica. No es claro como pudo llegar a estas curvas (aunque hay varias conjeturas). Es probable que fuera de una manera similar a la manera en la que Apolonio de Perga (262 a.C.) las deduce en sus libros.

En el siglo III a.C., Apolonio estudia las cónicas como una sección de un cono circular y caracteriza los puntos de la cónica según sus distancias a dos líneas y deduce una gran cantidad de propiedades geométricas a partir de su caracterización, todo en términos geométricos, sin notación algebraica (la manipulación de las cónicas es esencialmente algebraica, disfrazada en forma geométrica). Sus tratados sobre cónicas fueron una joya de las matemática antigua.

Pappus de Alejandría (a.C.290 - a. C.350) publicó una obra en la que se resume los conocimientos matemáticos de su época, recogiendo fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Alejandría, hoy en gran parte perdidas. En lo que respecta a cónicas, su contribución más importante fue la introducción de los conceptos de foco, directriz y excentricidad de una cónica con lo que se puede dar una definición equivalente en términos de la proporción entre la distancia de los puntos de la cónica a un foco y la distancia a una directriz; esta proporción es constante y se denota con  $e$  y se le llama *excentricidad* de la cónica.



**Figura 1.2:** Definición de una cónica usando foco, directriz y excentricidad.

Después de Pappus pasaron doce siglos en el que hubo una total pérdida de interés por las cónicas (desde los tiempos de Pappus hasta el siglo XVII). Luego vino un renovado interés en una época en que se tenían nuevos métodos (los de Desargues y los de la geometría analítica) y las necesidades de la nueva astronomía, por ejemplo.

Para los pioneros de la ciencia moderna (Galileo, Kepler, Huygens y Newton), los estudios de Apolonio sobre la parábola, hipérbola y la elipse fueron el punto de partida para su exploración de las leyes de la naturaleza.

Con la introducción de la geometría analítica (geometría con coordenadas más la posibilidad de manipular y resolver ecuaciones algebraicas), las curvas planas se podían definir por una ecuación de dos variables. J. Wallis fue el primero en probar de manera clara, en 1655, que la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es la representación algebraica de las cónicas. Según los coeficientes  $A, B, C, D, E$  y  $F$ , hay curvas de diversa naturaleza. Por ejemplo,  $x^2 + y^2 = 0$  la satisface solo el punto  $(x, y) = (0, 0)$  mientras que  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  no tiene solución. Si la ecuación factoriza como  $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  tendríamos un par de rectas, es decir, los puntos que están sobre las rectas de ecuación  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  o  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  satisfacen el caso reducible. Fuera de estos 'casos degenerados' y del caso reducible, queda el caso irreducible que corresponde a las parábolas, elipses e hipérbolas.

En este capítulo se introducen las cónicas como lugares geométricos<sup>1</sup> y luego se pasa a la versión analítica. En la primera parte solo consideramos cónicas con eje focal paralelo a los ejes coordenados, es decir, cónicas de ecuación  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . En la segunda parte se considera la ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  que, en el caso no degenerado, corresponde a cónicas con rotación. Haciendo un cambio de variable, se “elimina la rotación” y volvemos al caso estándar en un nuevo sistema de ejes.

**Graficador de cónicas.** Una manera fácil de obtener la representación gráfica de una cónica es introducir su ecuación (o sus propiedades) en WOLFRAM ALPHA, en <http://www.wolframalpha.com/input/?i=conics>

## 1.2 Preliminares

**Distancia entre dos puntos.** La distancia euclidiana de un punto  $A = (a_1, a_2)$  a otro punto  $B = (b_1, b_2)$  se puede obtener usando el teorema de Pitágoras:  $d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

### Ejemplo 1.1

Sean  $A = (1, 1)$  y  $B = (5, 3)$ . Entonces,

$$d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{(1 - 5)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20}$$

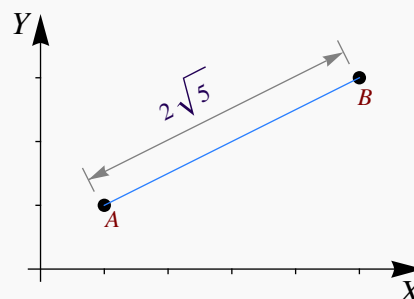


Figura 1.3:  $\|B - A\| = \sqrt{20}$

**Punto Medio.** El punto medio entre  $A$  y  $B$  es  $M = \frac{A+B}{2}$ . La distancia de  $A$  a  $M$  es  $d(A, M) = \frac{\|A-B\|}{2}$ .

### Ejemplo 1.2

Sean  $A = (1, 1)$  y  $B = (5, 3)$ . El punto medio es  $M = \frac{(1+5, 3+1)}{2} = (3, 2)$ .

<sup>1</sup>Las definiciones que se presentan son equivalentes a la definición original de las “cónicas” como una sección de un cono. Una demostración elegante de esta equivalencia fue presentada en 1822 por el matemático belga G.P. Dandelin. Aunque es sencilla, en este texto no se incluye la demostración. Se puede consultar [10].

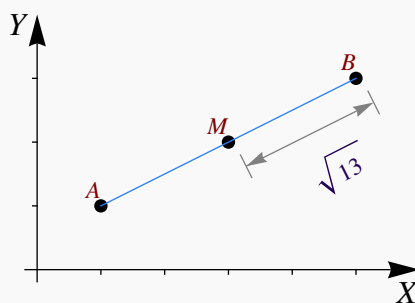


Figura 1.4:  $d(M, B) = \sqrt{13}$

**Completar el cuadrado.** En el tema de cónicas es muy útil la “completación de cuadrados” pues nos permite reducir ecuaciones del tipo  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  a una ecuación más natural y con más información. Una manera de completar cuadrados es

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

### Ejemplo 1.3

a.) Completar el cuadrado en  $4x^2 - 8x$

$$\begin{aligned} \text{Solución: } 4x^2 - 8x &= 4 \left( x + \frac{-8}{2 \cdot 4} \right)^2 - \frac{(-8)^2}{4 \cdot 4} \\ &= 4(x - 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

b.) Completar el cuadrado en:  $y^2 + 4y - 8$

$$\begin{aligned} \text{Solución: } y^2 + 4y - 8 &= \left( y + \frac{4}{2} \right)^2 - \frac{(4)^2}{4 \cdot 1} - 8 \\ &= (y + 2)^2 - 12 \end{aligned}$$

**Lugares geométricos.** Informalmente, un “lugar geométrico” es el “rastros” o la “huella” que deja un punto que se mueve de acuerdo a una ley especificada. En lo que a nosotros concierne, usaremos esta definición: Un “lugar geométrico” es el conjunto de todos los puntos (usualmente los puntos de una curva o una superficie) que satisfacen algún criterio o propiedad.



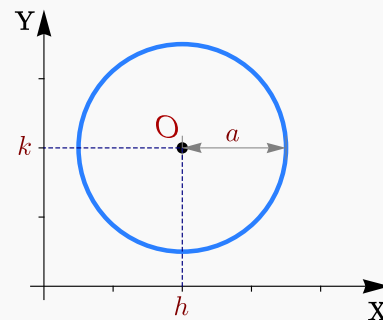
**Ejemplo 1.4** (Lugar geométrico).

Una circunferencia en el plano es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto  $O$  llamado “centro”.

Nos interesa *la ecuación cartesiana* de la curva que se forma: Una circunferencia de radio  $a$  está formada por todos los puntos  $(x, y)$  que están a una distancia “ $a$ ” del centro  $O = (h, k)$ . Entonces

$$\begin{aligned} ||(x, y) - (h, k)|| = a &\Rightarrow \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = a \\ &\Rightarrow (x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 \end{aligned}$$

La ecuación  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$  es la versión “analítica” para una circunferencia de centro  $(h, k)$  y radio  $a$ .

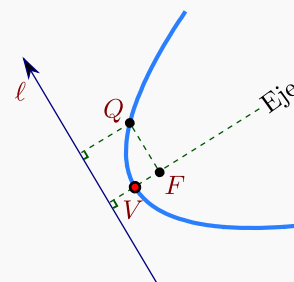


**Figura 1.5:** Lugar geométrico

## 1.3 La Parábola

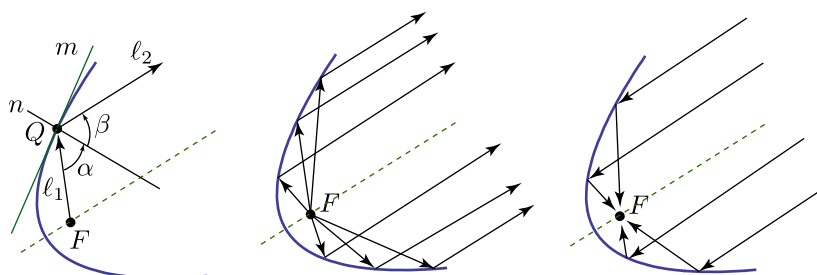
### Definición 1.1 (La parábola como lugar geométrico).

En un plano, una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos  $Q$  equidistantes de un punto fijo  $F$  (llamado *foco*) y de una recta fija  $\ell$  (llamada *directriz*) que no contiene a  $F$ , es decir,  $d(Q, F) = d(Q, \ell)$ .



**Figura 1.6:** Parábola

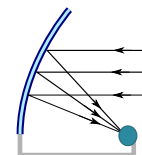
**Propiedad focal de la parábola:** En Física, la ley de reflexión establece que si un rayo de luz  $\ell_1$  toca una superficie pulida  $m$  en un punto  $Q$ , este rayo es reflejado a lo largo de otra recta  $\ell_2$  de tal manera que si  $n$  es la recta normal a  $m$  en  $Q$ , el ángulo de incidencia  $\alpha$  es igual al ángulo de reflexión  $\beta$ . Esta ley combina muy bien con la llamada “propiedad focal” de la parábola: *La normal a la parábola en cualquier punto  $Q$  de la parábola forma ángulos iguales con el segmento  $FQ$  (que corresponde a  $\ell_1$ ) y la recta que pasa por  $Q$  y es paralela al eje de simetría de la parábola (que corresponde a  $\ell_2$ ).*



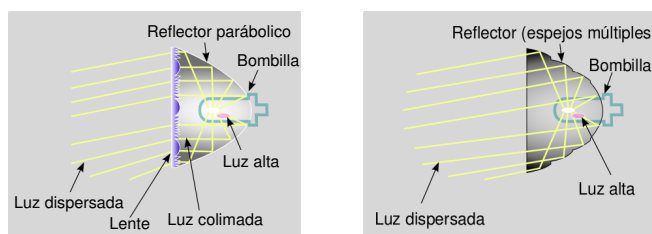
**Aplicaciones.** Las antenas utilizadas preferentemente en las comunicaciones vía satélite son las antenas parabólicas. Las señales que inciden sobre su superficie se reflejan y alimentan el foco de la parábola, donde se encuentra el elemento receptor (también podría ser un elemento emisor). Son antenas parabólicas de foco primario.



Se usa también otro tipo de antena que no es redonda, sino oval y simétrica y se obtiene como un corte de la antena parabólica; el receptor queda en el punto focal, pero recibe alimentación a un lado (*antena offset*) del plato resultante del corte, esto se hace así para evitar eliminar la 'sombra' del receptor (con lo que el rendimiento es algo mayor que en la de foco primario).

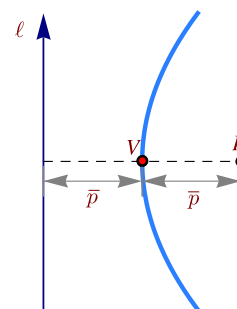


La propiedad focal de la parábola también se usa para el diseño de los focos de los automóviles, en este caso se debe usar un lente para desviar la luz de tal manera que no afecte a los conductores que vienen de frente,

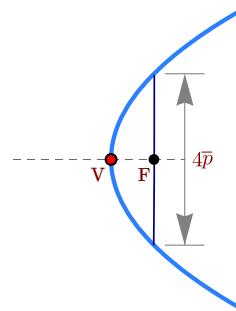


**Figura 1.7:** Reflectores parabólicos (Wikipedia Commons)

**Directriz, eje, vértice y foco.** La recta que pasa por  $F$  y es perpendicular a  $L$  se llama “eje” o “eje de simetría”. El punto de la parábola que está sobre este eje transversal se llama *vértice* y lo denotamos con  $V$ . Por la definición de la parábola, el vértice está a la misma distancia de la recta  $\ell$  y del Foco. Esta distancia la denotamos con  $\bar{p}$



**Latus Rectum:** El *latus rectum* de la parábola es la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje. La longitud del *latus rectum* es  $4\bar{p}$ .



### Tratamiento analítico.

La versión analítica, en posición estándar, requiere colocar la directriz paralela al eje  $X$  o paralela al eje  $Y$ .

**Directriz paralela al eje  $Y$ .** Si la directriz es paralela al eje  $Y$  y si  $V = (h, k)$ , entonces hay dos posibilidades: la parábola abre a la izquierda o abre a la derecha.

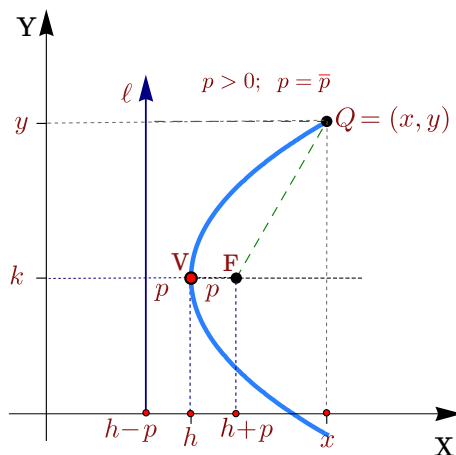
En el caso de que la parábola abra a la derecha, el foco es

$$F = (h + \bar{p}, k)$$

Los puntos  $Q = (x, y)$  de la parábola satisfacen  $d(Q, F) = d(Q, \ell)$ , es decir,

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - h - \bar{p})^2 + (y - k)^2} &= x - h + \bar{p} \\ (x - h - \bar{p})^2 + (y - k)^2 &= (x - h + \bar{p})^2 \\ (y - k)^2 &= 4\bar{p}(x - h)\end{aligned}$$

Como  $\bar{p} > 0$ , entonces  $x \geq h$  como se espera.



**Figura 1.8:** Parábola con directriz paralela al eje  $Y$  y  $p > 0$

Así, si la parábola abre hacia la derecha, su *ecuación canónica* es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{con } p > 0.$$

En el caso de que la parábola abra a la izquierda, el foco es  $F = (h - \bar{p}, k)$ . Los puntos  $Q = (x, y)$  de la parábola satisfacen  $d(Q, F) = d(Q, L)$ . Procediendo como antes,

$$\sqrt{(x - h + \bar{p})^2 + (y - k)^2} = x - h - \bar{p} \implies (y - k)^2 = 4p(x - h) \quad \text{con } p = -\bar{p}.$$

Como  $p = -\bar{p}$ , el foco es  $F = (h + p, k)$  nuevamente.

En ambos casos, la ecuación simplificada es  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  donde  $\bar{p} = |p|$ . Con esta notación, si  $p > 0$ , la parábola abre a la derecha y si  $p < 0$ , la parábola abre a la izquierda. Esta ecuación es llamada *ecuación canónica o natural*. Esta ecuación es especial pues contiene la información del vértice, el foco y la directriz.

### Parábola $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

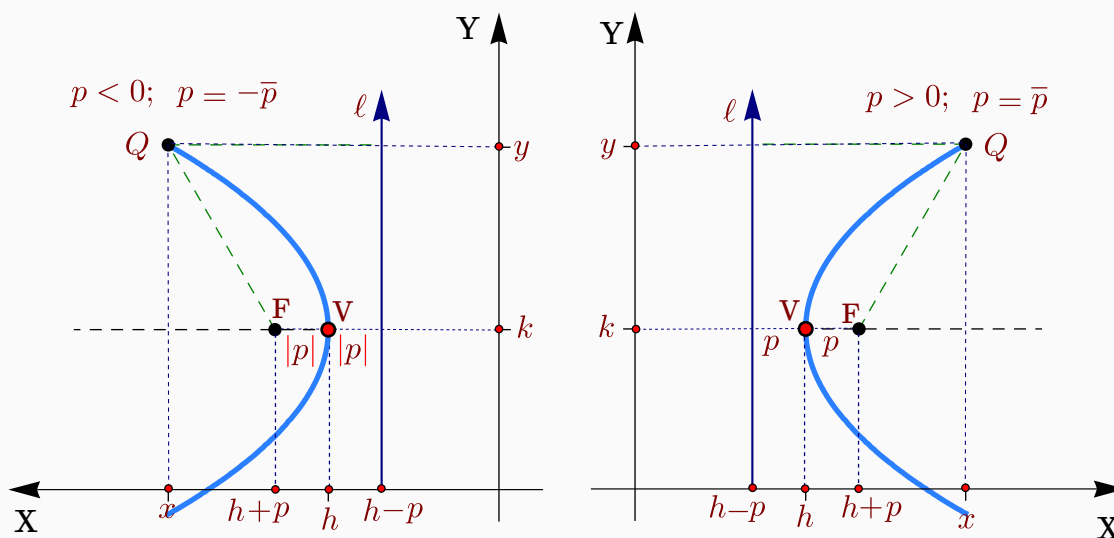


Figura 1.9: Parábola con directriz  $\ell$  paralela al eje  $Y$ .

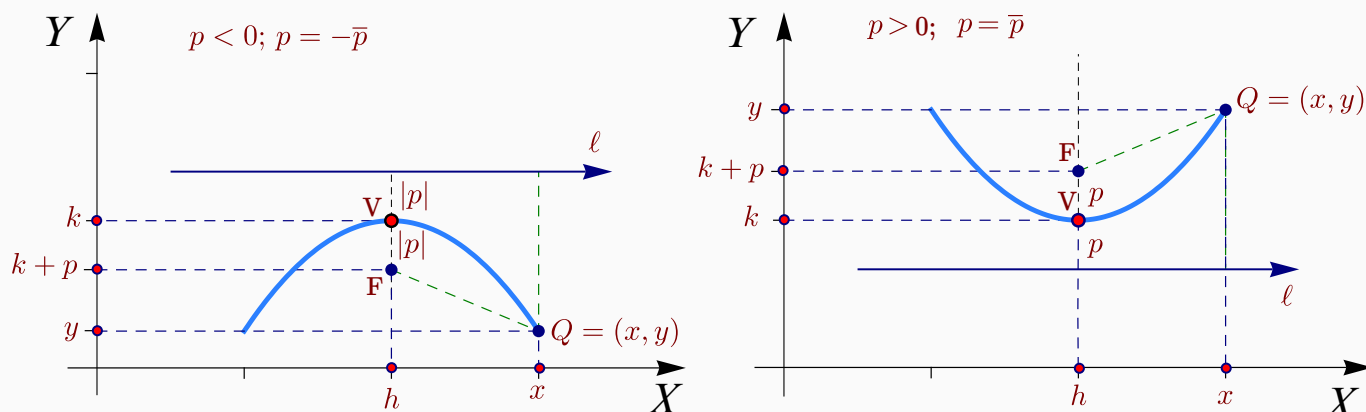
**Directriz paralela al eje  $X$ .** De manera análoga al caso anterior, si la directriz es paralela al eje  $X$ , entonces la *ecuación canónica* de la parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

de tal manera que si  $p > 0$ , la parábola abre hacia arriba y si  $p < 0$ , la parábola abre hacia abajo.

En resumen, si la directriz es paralela al eje  $X$  o paralela al eje  $Y$ , y si el vértice es  $V = (h, k)$ , la ecuación canónica es



**Parábola  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$** **Figura 1.10:** Parábola con directriz  $\ell$  paralela al eje  $X$ .

**Ecuación general de la parábola en posición estándar.** La ecuación general de la parábola es de la forma  $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  con  $C \neq 0$  y  $D \neq 0$  o de la forma  $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$  con  $A \neq 0$  y  $E \neq 0$ . Completando el cuadrado obtenemos la ecuación canónica. También podríamos obtener el vértice, el foco y la ecuación de la directriz en términos de  $C, D, E$  y  $F$ .

**Ejemplo 1.5**

Verificar que el vértice de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  es el punto  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .

**Solución:** Completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c - y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c - y \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} - y. \end{aligned}$$

Entonces,  $ax^2 + bx + c - y = 0 \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ . Si  $\Delta = b^2 - 4ac$  el vértice es  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .

**Ejemplo 1.6**

Hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es  $y^2 - 6y - 2x + 17 = 0$ . Además realice la gráfica.

**Solución:** Para hallar la ecuación canónica debemos completar cuadrados.

$$y^2 - 6y - 2x + 17 = 0$$

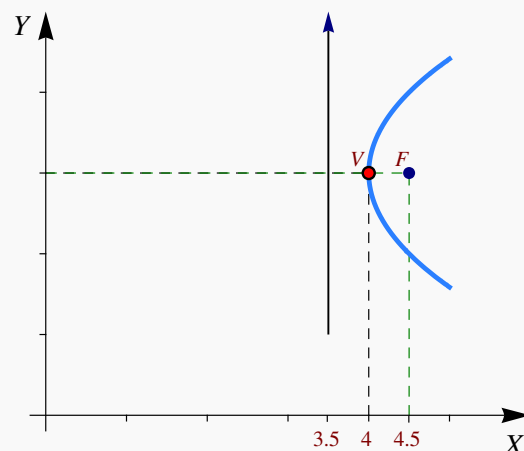
$$(y - 3)^2 - 9 - 2x + 17 = 0$$

$$(y - 3)^2 = 2(x - 4)$$

El vértice es  $V = (4, 3)$  y como  $4p = 2 \Rightarrow p = 1/2 > 0$ .

La parábola abre hacia la derecha y tiene el foco en  $F = (4.5, 3)$ .

La directriz es la recta de ecuación  $x = 3.5$ . La gráfica se muestra en la figura.



**Figura 1.11:** Parábola  $(y - 3)^2 = 2(x - 4)$

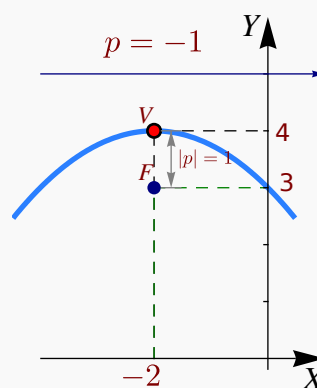
**Ejemplo 1.7**

Hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en  $(-2, 4)$  y foco en  $(-2, 3)$ . Realizar la gráfica.

**Solución:** Dado que el vértice y el foco tienen igual abscisa, el eje de la parábola es vertical, además la distancia entre el foco y el vértice es  $|p| = 1$  y como abre hacia abajo,  $p = -1$ . Entonces la ecuación canónica es,

$$(x + 2)^2 = -4(y - 4)$$

La directriz es la recta  $y = 5$ . La gráfica se muestra en la figura.

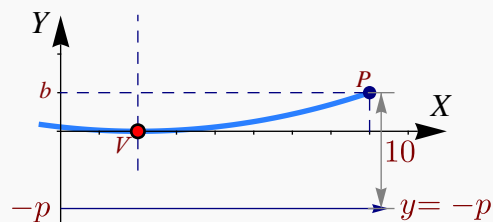


**Figura 1.12:** Parábola  $(x + 2)^2 = -4(y - 4)$

**Ejemplo 1.8**

Determine la ecuación canónica y el foco de la parábola (o las parábolas) que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones

- a.) vértice en  $(2, 0)$ ,
- b.) contiene al punto  $P = (8, b)$  con  $b > 0$ ,
- c.) la distancia de  $P$  a la directriz es 10,
- d.) eje de simetría paralelo al eje  $Y$ .



**Solución:** De acuerdo a d.) la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. Por la posición del vértice y el punto  $(8, b)$ , solo podría abrir hacia arriba. El vértice es  $(h, k) = (2, 0)$  por lo que la ecuación de la parábola es

$$(x - 2)^2 = 4p(y - 0); p > 0.$$

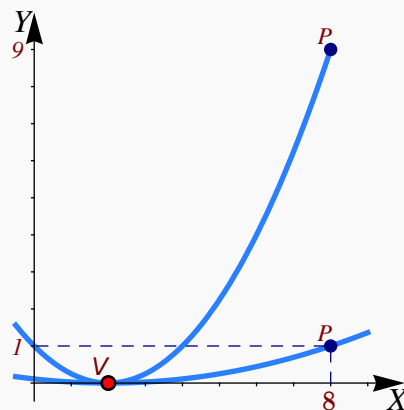
La directriz es  $y = k - p = -p$ . Para determinar  $p$  y  $b$  tenemos dos datos

- La distancia de  $(8, b)$  a la directriz es 10, es decir  $b + p = 10$
- El punto  $(8, b)$  está en la parábola, es decir,  $(8 - 2)^2 = 4p(b)$

Entonces tenemos

$$b = 10 - p$$

$$36 = 4pb \Rightarrow 36 = 4p(10 - p) \Rightarrow 36 - 40p + 4p^2 = 0$$



Con lo que  $p = 1$  o  $p = 9$ . Por lo tanto, las parábolas que cumplen estas condiciones son  $(x - 2)^2 = 4y$  (cuando  $b = 1$ ) o  $(x - 2)^2 = 36y$  (cuando  $b = 9$ ). Ambas parábolas se muestran en la figura de la derecha.

**Ejemplo 1.9**

Hallar las parábolas que contienen los puntos  $(4, 4)$ ,  $(4, -4)$  de la circunferencia  $(x - 6)^2 + y^2 = 20$  y la distancia de su vértice al centro de esta circunferencia es 6 unidades.

**Solución:** La situación, según los datos, es la que se presenta en la figura de la derecha. La ecuación es, en ambos casos,  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ .

- Si el vértice es  $(h, k) = (0, 0)$  : Como  $(4, 4)$  está en la parábola, entonces

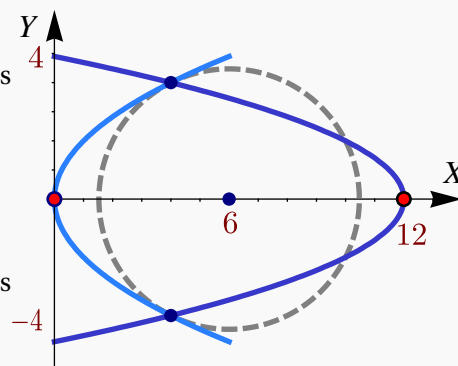
$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \Rightarrow 4^2 = 16p \Rightarrow p = 1.$$

La ecuación de la parábola es  $y^2 = 4x$ .

- Si el vértice es  $(h, k) = (12, 0)$  : Como  $(4, 4)$  está en la parábola, entonces

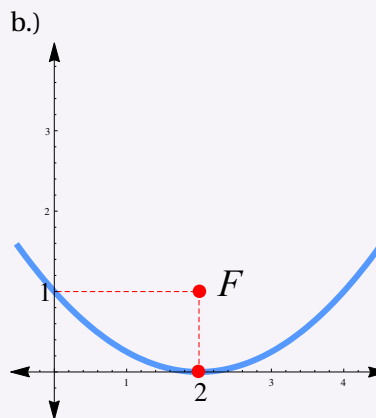
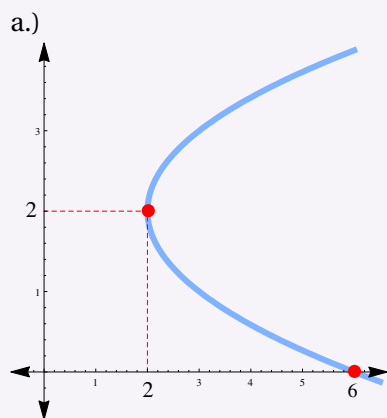
$$y^2 = 4p(x - 12) \Rightarrow 4^2 = 4p(-8) \Rightarrow p = -1/2$$

La ecuación de la parábola es  $y^2 = -2(x - 12)$



## 1 Ejercicios

**1.1** Considere la representación gráfica de las parábolas en las figuras que siguen. Con base a esta representación gráfica, determine la ecuación canónica de cada una de ellas.



**1.2** Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos  $Q$  del plano  $XY$  tales que equidistan del punto  $(2, 3)$  y de la recta de ecuación  $x = 4$ .

**1.3** Determine la ecuación canónica de las siguientes parábolas,

a.)  $y = 2x^2 - 4x + 1$ .

b.)  $-9y^2 - 8x - 3 = 0$

c.)  $y^2 + 2y - 4x = 7$

d.)  $x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$

e.)  $x^2 - y + 2 = 0$

**1.4** Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en  $(1, 3)$  y foco en  $(2, 3)$ .

**1.5** Determine la ecuación canónica de la parábola con eje focal paralelo al eje  $X$  y que pasa por los puntos  $(0, 0)$ ,  $(-1, 2)$  y  $(-2, -2)$

**1.6** Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en  $(-1, 1)$  y directriz  $y = 0$ .

**1.7** Determine la ecuación canónica de la parábola con foco en  $(3, 4)$  y directriz  $x = 7$ .

**1.8** Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en  $(2, 3)$ , eje focal paralelo al eje  $Y$  y que pasa por el punto  $(4, 5)$ .

**1.9** Hay *tres* parábolas que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

- a.) Vértice en  $(2, 0)$ ,
- b.) contiene al punto  $P = (b, 8)$  con  $b > 2$ ,
- c.) la distancia de  $P$  a la directriz es 10.

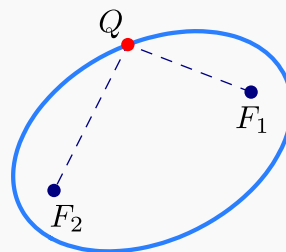
Determine la ecuación canónica de cada una de estas parábolas y el valor de  $b$  en cada caso.

## 1.4 La Elipse

### Definición 1.2 (La elipse como lugar geométrico).

En un plano, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos  $Q$  cuya suma de distancias a dos puntos fijos,  $F_1$  y  $F_2$ , (llamados *focos*), es constante (una constante mayor que  $d(F_1, F_2)$ ). Si la suma es la constante  $2a$ , con  $2a > d(F_1, F_2)$ , entonces

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$



**Propiedad focal de la elipse.** La elipse también tiene una “propiedad focal” análoga a la de la parábola: *La normal a la elipse en cualquier punto  $Q$  de la elipse forma ángulos iguales con el segmento  $F_1Q$  y el segmento  $F_2Q$*

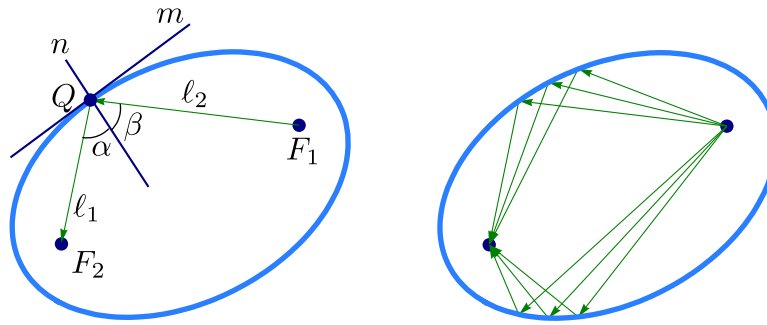
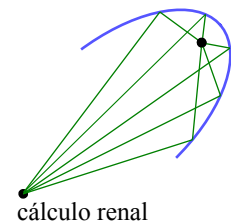
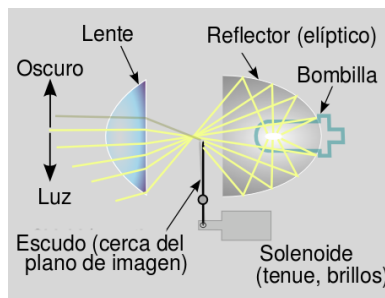


Figura 1.13

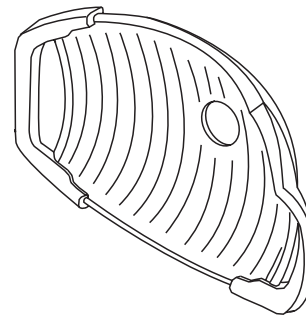
Esta propiedad se usa por ejemplo en medicina para tratar cálculos (“piedras”) que se forman en el riñón, vejiga y uréteres; con ondas de choque. La “litotricia extracorpórea” por ondas de choque consiste en la emisión de ondas desde un aparato emisor de ondas. El paciente se acuesta sobre una mesa y el emisor de ondas se acopla en un sistema reflector apropiado con forma elíptica, de tal manera que el emisor esté en un foco y el cálculo renal en el otro. De esta forma las ondas de choque (que casi no sufren pérdidas en agua y tejidos corporales) al reflejarse en la pared elíptica, inciden directamente en el cálculo.



Como en el caso de la parábola, también la propiedad focal de la elipse se usa para el diseño de focos para automóvil y de reflectores para las lámparas que vemos en el consultorio del dentista,

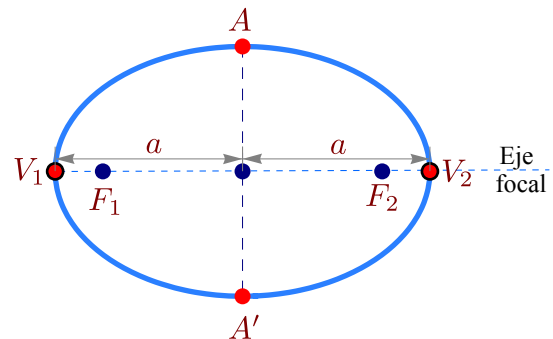


Foco moderno



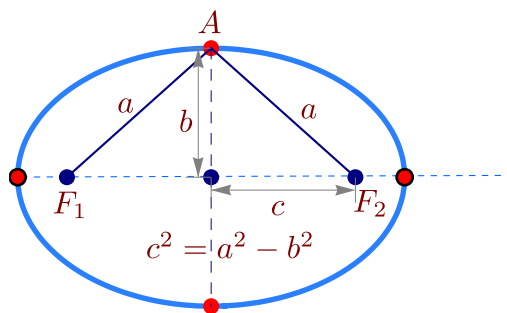
Lámpara de dentista

**Ejes, centro y vértices.** Supongamos que los focos de la elipse son  $F_1$  y  $F_2$ . Además,  $d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$  con  $2a > d(F_1, F_2)$ . La recta que pasa por los focos se llama *eje focal*. Este eje focal corta a la elipse en dos puntos  $V_1$ ,  $V_2$  llamados *vértices*. El segmento de recta que une los vértices se llama *eje mayor*. El punto en la mitad del eje mayor se llama *centro* de la elipse. El *eje normal* es el eje que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal. Este eje normal corta a la elipse en dos puntos  $A$  y  $A'$ . El segmento que une estos dos puntos se llama *eje menor*.

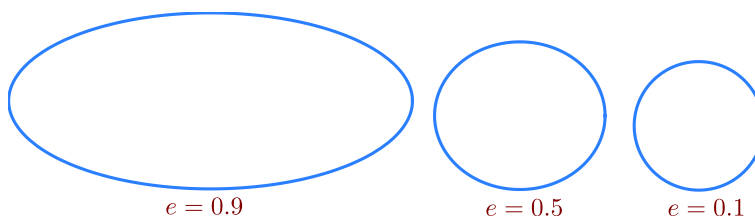


De acuerdo a la definición de la elipse, la distancia entre los vértices es  $2a$  y cada vértice está a una distancia de  $a$  unidades del centro.

Si la longitud del semieje menor es  $b$ , entonces como el triángulo  $\triangle F_1AF_2$  es isósceles, entonces  $d(A, F_1) = a$  y se obtiene que la distancia de cada foco al centro es  $c$  con  $c^2 = a^2 - b^2$ .

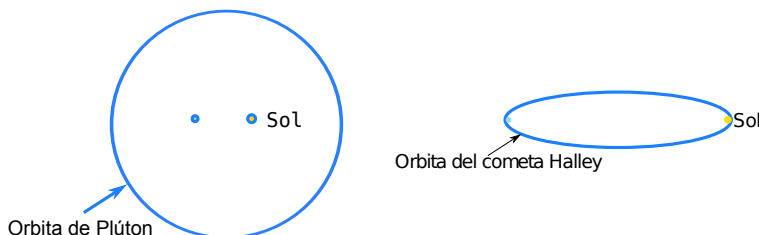


**Excentricidad.** La excentricidad de la elipse se define como  $e = \frac{c}{a}$  y describe la forma general de la elipse, además  $0 < e < 1$ . Para una circunferencia la excentricidad es cero y valores cercanos a 1 corresponden a elipses más alargadas y achatadas (ver sección 8.1.4).

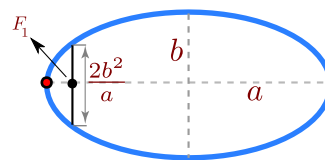


**Figura 1.14:** Excentricidad de la elipse

La excentricidad de las órbitas planetarias varían mucho en el sistema solar. La excentricidad de la tierra es 0.017 lo que la hace casi circular. La excentricidad de Plutón es 0.25 y es la más alta del sistema solar. La excentricidad del cometa Halley es 0.97 lo que hace que su órbita sea muy alargada, tanto que tarda 76 años en completar su órbita y la mayoría del tiempo permanece invisible para nosotros.



**Latus Rectum.** Los *latus rectum* en la elipse corresponden a las cuerdas perpendiculares al eje focal y que pasan por cada uno de los focos. Si  $a$  es la longitud del semieje mayor y  $b$  es la longitud del semieje menor, la longitud de cada cuerda es  $\frac{2b^2}{a}$ .



### Tratamiento analítico.

La versión analítica, en posición estándar, requiere poner el eje mayor paralelo al eje  $X$  o paralelo al eje  $Y$ .

**Eje mayor paralelo al eje Y.** En este caso, si el centro es  $(h, k)$ , entonces  $F_1 = (h, k - c)$  y  $F_2 = (h, k + c)$ . Los puntos  $(x, y)$  de la elipse satisfacen

$$d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} = 2a$$

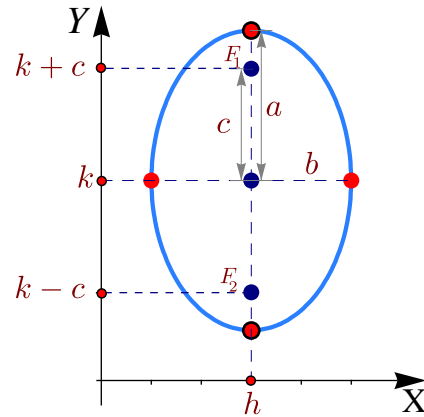


Figura 1.15: Elipse con eje mayor paralelo al eje Y

Ahora simplificamos la ecuación,

$$\left( \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} \right)^2 = \left( 2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \right)^2$$

$$a^2 - c(y-k) = a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2},$$

elevamos al cuadrado,

$$a^4 + 2a^2c(y-k) + c^2(y-k)^2 = a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 + 2a^2c(y-k) + a^2c^2,$$

sustituyendo  $c^2 = a^2 - b^2$ ,

$$-b^2(y-k)^2 = a^2(x-h)^2 - a^2b^2 \Rightarrow \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

La ecuación simplificada  $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ , se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, la longitud  $c$ , focos y vértices.

**Eje mayor paralelo al eje X.** En este caso, si el centro es  $(h, k)$ , entonces  $F_1 = (h - c, k)$  y  $F_2 = (h + c, k)$ . Los puntos  $(x, y)$  de la elipse satisfacen

$$d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} = 2a.$$

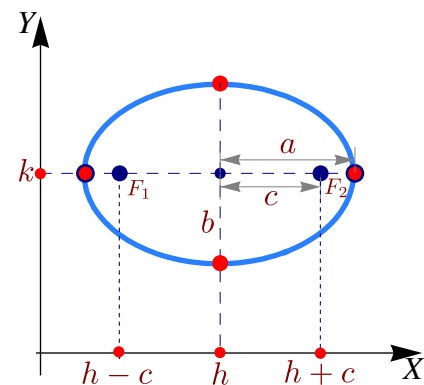


Figura 1.16: Elipse con eje mayor paralelo al eje X

mo antes, la ecuación simplificada queda  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ . A esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o

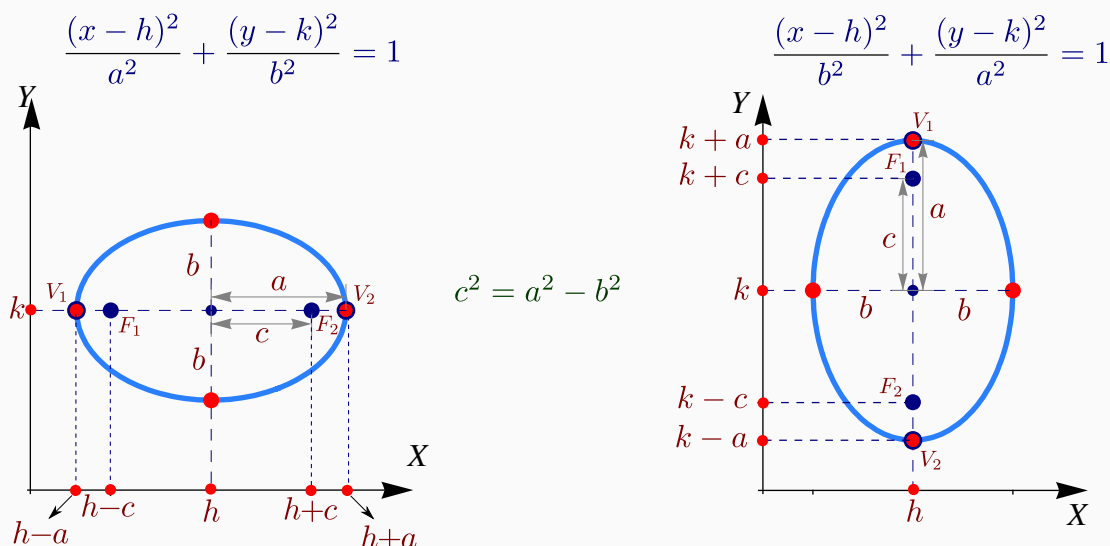
Co-



*natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, la longitud  $c$ , focos y vértices.

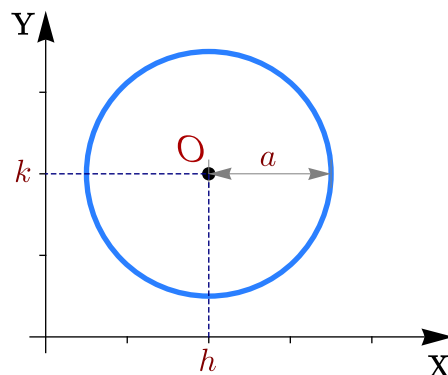
En resumen,

**Elipse sin rotación. “ $a$ ” es la longitud del semieje mayor**



**Circunferencia de radio  $a$ .** Formalmente, la curva que delimita un círculo se llama *circunferencia*. Por abuso del lenguaje se habla de un “círculo de radio  $a$ ”. La circunferencia es un caso especial de elipse en la que los focos son iguales y coinciden con el centro de la circunferencia. En este caso,  $a^2 = b^2 = a^2$ . Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia de un círculo con centro en  $O = (h, k)$  y radio  $a$ , es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{o también} \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$



**Figura 1.17:** Circunferencia de radio  $a$  centrada en  $(h, k)$

**Ecuación general de la elipse en posición estándar.** La ecuación general de un elipse con eje mayor paralelo al eje  $X$  o al eje  $Y$  es  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , con  $A$  y  $C$  no nulos y del mismo signo. Sin embargo, esta ecuación también podría tener como conjunto solución una cónica degenerada. Si la ecuación corresponde a una cónica propia, basta con que  $AC > 0$  para decir que es una elipse. La manera práctica de decidir si es una elipse es obtener la ecuación canónica completando cuadrados. El estudio de la ecuación general se hace en la sección (1.6).

**Ejemplo 1.10**

Hallar la ecuación canónica de la elipse  $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$ . Realizar su gráfica identificando los vértices, los focos y el centro.

**Solución:** Para hallar la ecuación canónica debemos completar el cuadrado de la expresión en ambas variables  $x$  e  $y$ .

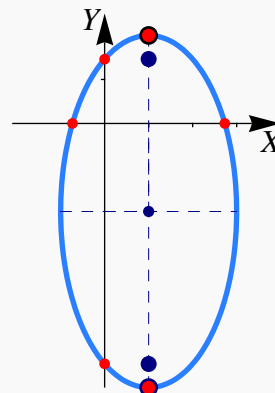
$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$$

$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y - 8 = 0$$

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

El centro es  $(h, k) = (1, -2)$ . La elipse tiene eje mayor paralelo al eje  $Y$ . Como  $a^2 = 16$  y  $b^2 = 4$ , entonces  $a = 4$  y  $b = 2$ . Ahora,  $c^2 = 16 - 4 \Rightarrow c = \sqrt{12}$ . Los focos son  $(1, -2 \pm \sqrt{12})$  y los vértices son  $(1, -6)$ ,  $(1, 2)$ . Las intersecciones con los ejes son  $y \approx -5.46$ ,  $y \approx 1.46$ ,  $x \approx -0.73$  y  $x \approx 2.73$ .

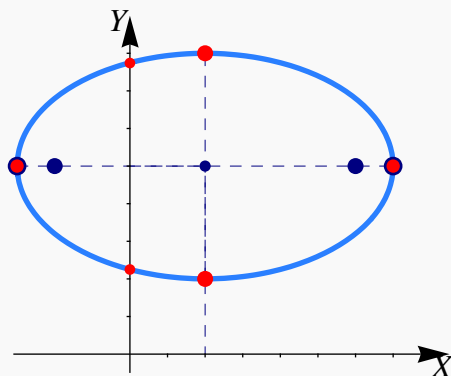
**Ejemplo 1.11**

Determine la ecuación canónica y las características más importantes de la elipse cuyo eje mayor tiene extremos  $(-3, 5)$  y  $(7, 5)$  y cuyo eje menor tiene extremos  $(2, 2)$  y  $(2, 8)$ .

**Solución:** El centro es el punto medio entre  $(-3, 5)$  y  $(7, 5)$ , es decir,  $(2, 5)$ . El semieje mayor mide  $a = 5$  y el semieje menor mide  $b = 3$ . Como el eje mayor es paralelo al eje  $X$ , la ecuación canónica es,

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1.$$

Como  $c^2 = 25 - 9$ , entonces  $c = 4$  y los focos son  $(2 \pm 4, 5)$ . Los vértices son  $(2 \pm 5, 5)$ . Las intersecciones con el eje  $Y$  son  $y \approx 2.25$  y  $y \approx 7.75$ .



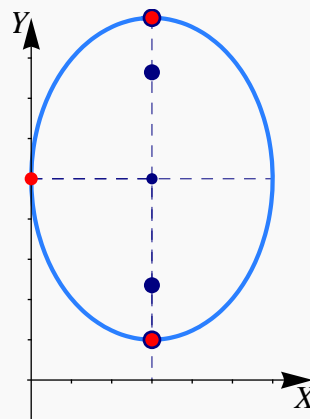
**Ejemplo 1.12**

Determine la ecuación canónica de la elipse con vértices en  $(3, 1)$ ,  $(3, 9)$  y eje menor de longitud 6. Trazar la gráfica.

**Solución:** El eje mayor de la elipse es paralelo al eje  $Y$ . Como la longitud del eje menor es de 6 unidades, entonces  $b = 3$ . Como los vértices están en  $(3, 1)$  y  $(3, 9)$ , entonces el centro es  $(h, k) = (3, 5)$  y por tanto  $a = 4$ . La ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

La gráfica de la elipse se muestra en la figura de la derecha. Solo hay una intersección con el eje  $Y$  en  $y = 5$ .

**Ejemplo 1.13**

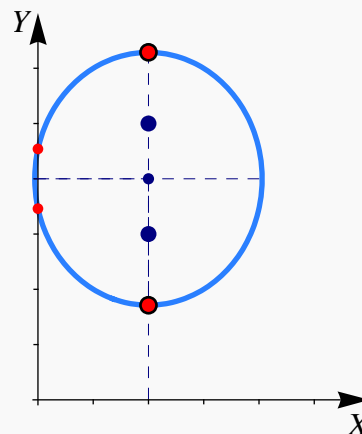
Determine la ecuación canónica de la elipse con focos en  $(2, 5)$  y  $(2, 3)$  y que contiene al punto  $(3, 6)$ . Trazar la gráfica.

**Solución:** Por la posición de los focos, el eje mayor es paralelo al eje  $Y$ . Además también deducimos que el centro es  $(h, k) = (2, 4)$  y que  $c = 1$ . Como  $c^2 = a^2 - b^2$ , tenemos  $b^2 = a^2 - 1$ . Hasta ahora tenemos que la ecuación canónica es

$$\frac{(x-2)^2}{b^2} + \frac{(y-4)^2}{a^2} = 1$$

Como  $b^2 = a^2 - 1$  y como la elipse contiene al punto  $(3, 6)$ , este punto satisface esta ecuación, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{(3-2)^2}{b^2} + \frac{(6-4)^2}{a^2} &= 1, \\ \frac{1}{a^2-1} + \frac{4}{a^2} &= 1 \Rightarrow a^2 = 3 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$



Como  $b^2 = a^2 - 1 > 0$ , la única solución es  $\frac{(x-2)^2}{2+\sqrt{5}} + \frac{(y-4)^2}{3+\sqrt{5}} = 1$ . Las intersecciones con el eje  $Y$  son  $y \approx 3.46$ ,  $y \approx 4.54$ .

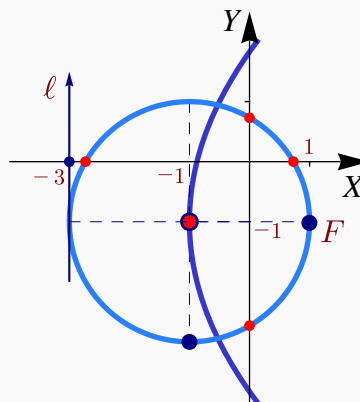
**Ejemplo 1.14**

Determine la ecuación de la circunferencia de radio 2 con centro en el vértice de la parábola de foco  $(1, -1)$  y directriz  $x = -3$ . Realizar la gráfica.

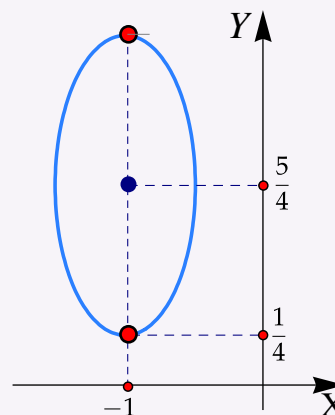
**Solución:** Como el vértice de una parábola está a la mitad del camino entre el foco y la directriz entonces  $(h, k) = (-1, -1)$ . La ecuación de la circunferencia es

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Las intersecciones con el eje  $X$  son  $x \approx -2.73$  y  $x \approx 0.73$ . Las intersecciones con el eje  $Y$  son  $y \approx -2.73$  y  $y \approx 0.73$ .

**2****Ejercicios**

**1.10** Considere la elipse a la derecha. Si se sabe que el punto  $(-1/2, 5/4)$  está en la elipse, determine su ecuación canónica, sus focos y sus vértices.



**1.11** En cada caso, obtener la ecuación canónica de la elipse.

a.)  $\frac{(y-1)^2}{2} + \frac{5(x+2)^2}{3} = 2$

b.)  $\frac{x^2}{16} + \frac{x}{2} + \frac{y^2}{4} + y + 1 = 0$

c.)  $\frac{x^2}{4} + x + \frac{y^2}{16} + \frac{y}{2} + 1 = 0$

d.)  $x^2 + \frac{y^2}{2} - 2y + 1 = 0$

**1.12** Considere la cónica  $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0$ . Trazar su gráfica identificando los vértices, los focos, el centro y la intersección con los ejes.

**1.13** Determine la ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen, contiene al punto  $(-1, 3)$  y uno de sus vértices es  $(0, 5)$ . Trazar la gráfica.

**1.14** Determinar la ecuación canónica de la elipse si se sabe que es tangente a los ejes en el primer cuadrante y uno de sus vértices es  $(8, 2)$ .

**1.15** Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en  $(0, 0)$ , eje mayor horizontal y los puntos  $(3, 1)$  y  $(4, 0)$  están en la elipse.

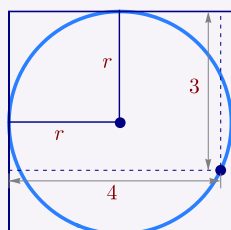
**1.16** Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en  $(2, 1)$ , longitud del eje menor  $2\text{ ul}$  y eje mayor vertical y de longitud  $6\text{ ul}$ .

**1.17** Hallar la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse que tiene un vértice y un foco en común con la parábola  $y^2 + 4x = 32$  y que tiene su otro foco en el origen.

**1.18** Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse cuya suma de distancias a los puntos  $(\pm 3, 0)$  es 16.

**1.19** Considere la cónica de ecuación  $9y^2 + 16x^2 + 54y - 64x + 1 = 0$ . Verifique que se trata de una elipse e indique sus características principales.

**1.20** Se tiene un círculo inscrito en un cuadrado tal y como se muestra en la figura que sigue. Determinar el radio.



**1.21** Determine la ecuación canónica de la elipse que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

- El vértice  $V_1$  de la elipse coincide con el foco de la parábola de ecuación  $(x - 2)^2 = -4y + 24$ .
- El vértice  $V_2$  de la elipse coincide con el centro de la hipérbola de ecuación  $x^2 - 4x - y^2 + 2y = -2$ .

c.) La elipse contiene el punto  $(1, 2)$ .

**1.22** Considere la cónica  $C$  de ecuación  $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$ . Determine la ecuación canónica y las características más importantes, de la elipse que cumple simultáneamente con las siguientes condiciones,

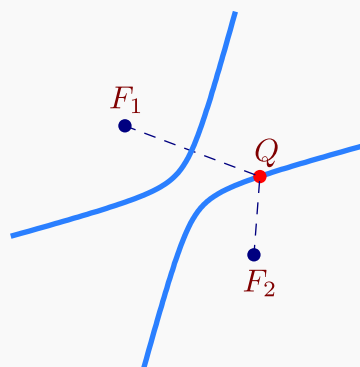
- a.) Su centro coincide en el vértice de la cónica  $C$
- b.) La distancia entre sus focos es 4 y están en la recta  $x = 2$
- c.) La distancia de un foco al vértice más cercano es 3

## 1.5 La Hipérbola.

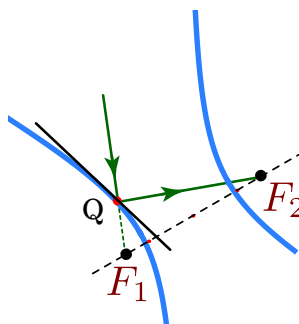
### Definición 1.3 (La hipérbola como lugar geométrico).

En un plano, una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos  $Q$  tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano,  $F_1$  y  $F_2$ , (llamados *focos*), es constante (una constante menor que  $d(F_1, F_2)$ ). Si la diferencia es la constante  $2a$ , con  $2a < d(F_1, F_2)$ , entonces

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a$$



**Propiedad focal de la hipérbola.** La hipérbola también tiene una “propiedad focal” análoga a la de la elipse y la parábola: *La normal a la hipérbola en cualquier punto  $Q$  de la hipérbola, forma ángulos iguales con el segmento  $F_1Q$  y el segmento  $F_2Q$ .*



La propiedad focal de la hipérbola tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, en la construcción de telescopios. Un telescopio común tipo Cassegrain consiste de un espejo primario parabólico y de un espejo secundario hiperbólico. En la figura (1.18) la luz se refleja en un espejo primario parabólico y se desplaza hacia el foco  $F$ . Antes de llegar a este foco, hay un espejo hiperbólico en el camino, que comparte el foco  $F$  con la parábola. Este espejo refleja la luz al otro foco de la hipérbola, donde se encuentra el observado.

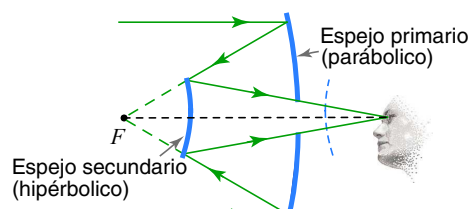
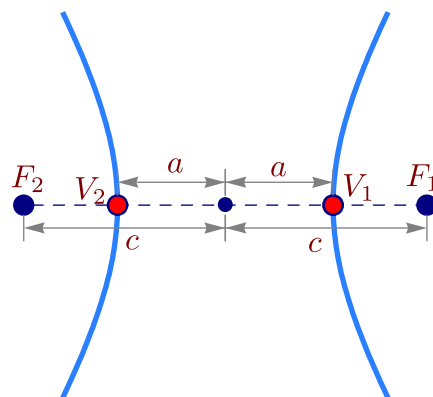


Figura 1.18: Telescopio Cassegrain.

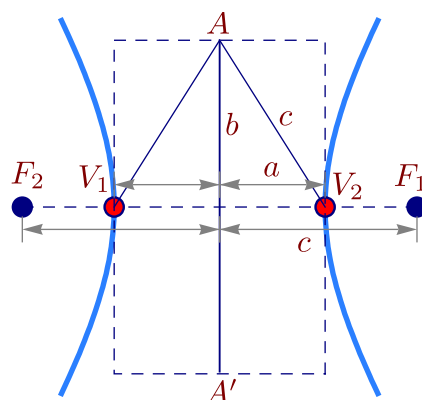
**Ejes, centro y vértices.** Supongamos que los focos de la hipérbola son  $F_1$  y  $F_2$ . Además,  $|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a$  con  $2a > d(F_1, F_2)$ . La recta que pasa por los focos se llama *eje focal*. Este eje focal corta a la hipérbola en dos puntos  $V_1, V_2$  llamados *vértices*. El segmento de recta que une los vértices se llama *eje transverso*. El punto medio de este eje se llama *centro* de la hipérbola.



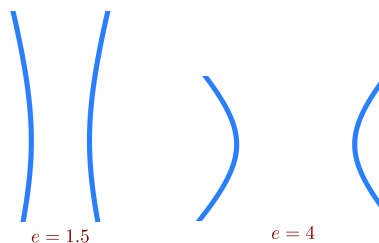
De la definición de la hipérbola se puede deducir que la distancia entre los vértices es  $2a$  y cada vértice está a una distancia de  $a$  unidades del centro.

Si la distancia del centro a cada uno de los focos es  $c$ , como  $c > a$ , podemos formar el triángulo isósceles  $\triangle V_1 V_2 A$  que se muestra en la figura de la derecha. La altura de este triángulo la denotamos con  $b$ . El *eje conjugado* es el segmento  $AA'$  (en la figura de la derecha) y mide  $2b$ . Este segmento pasa por el centro y es perpendicular al eje focal. Claramente, este el semieje conjugado tiene longitud  $b$  y, por pitágoras,

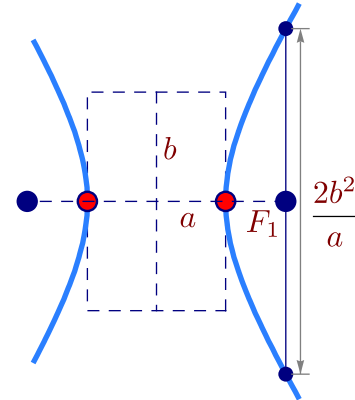
$$c^2 = a^2 + b^2.$$



**Excentricidad.** La excentricidad de la hipérbola es  $e = \frac{c}{a}$ . En este caso,  $e > 1$ . Si  $e \approx 1$ , las ramas de la hipérbola son muy abiertas mientras que si  $e$  no está cerca de 1, las ramas abren poco y la hipérbola se muestra “achatada” (ver sección 8.1.4).



**Latus Rectum.** Los *latus rectum* en la hipérbola corresponden a las cuerdas perpendiculares al eje focal y que pasan por cada uno de los focos. Al igual que en la elipse, cada lado recto mide  $\frac{2b^2}{a}$ .



### Tratamiento analítico.

La versión analítica, en posición estándar, requiere poner el eje focal paralelo al eje  $X$  o paralelo al eje  $Y$ .

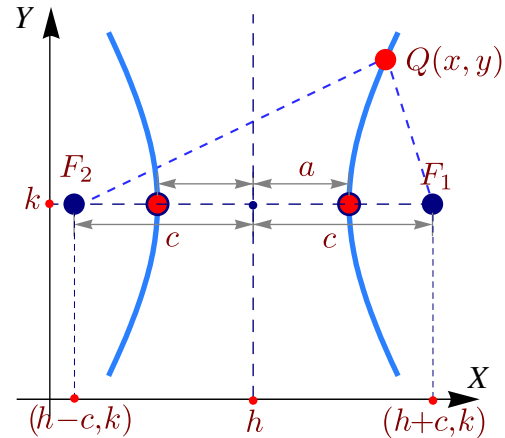
**Eje mayor paralelo al eje  $X$ .** En este caso, si el centro es  $(h, k)$ , entonces  $F_1 = (h - c, k)$  y  $F_2 = (h + c, k)$ . Los puntos  $Q = (x, y)$  de la hipérbola satisfacen

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a,$$

es decir,

$$\left| \sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} - \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} \right| = 2a$$

Para simplificar un poco el cálculo, supongamos que  $d(Q, F_1) - d(Q, F_2) > 0$  (el otro caso es totalmente similar), entonces



$$\left( \sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} \right)^2 = \left( 2a + \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} \right)^2,$$

$$c(x - h) - a^2 = a\sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2},$$

elevamos al cuadrado,

$$(c^2 - a^2)(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Poniendo  $b^2 = c^2 - a^2$ , la ecuación simplificada sería  $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ ; esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes,  $c$ , focos y vértices.

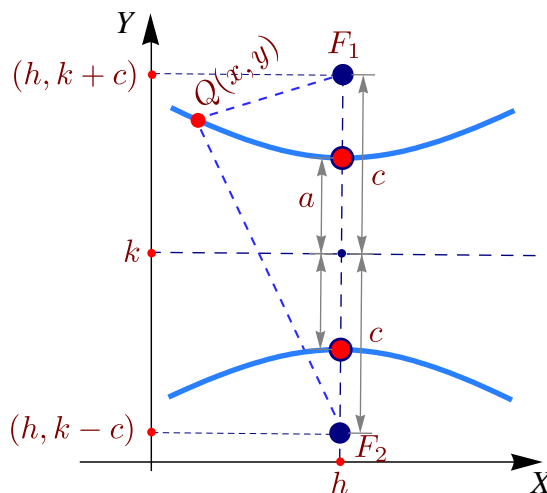


**Eje mayor paralelo al eje  $Y$ .** En este caso, si el centro es  $(h, k)$ , entonces  $F_1 = (h, k - c)$  y  $F_2 = (h, k + c)$ . Los puntos  $Q = (x, y)$  de la hipérbola satisfacen

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a,$$

es decir,

$$\left| \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \right| = 2a.$$



Como antes, la ecuación simplificada queda  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ . A esta ecuación se le llama *ecuación canónica o natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes,  $c$ , focos y vértices.

**Asíntotas de la hipérbola.** Consideremos las ecuaciones canónicas de la hipérbola. Despejando  $y$  en cada caso, se obtiene

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \implies y = k \pm \frac{a}{b} \sqrt{(x-h)^2 + b^2},$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \implies y = k \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x-h)^2 - a^2}.$$

Si  $x$  es suficientemente grande, se pueden despreciar las constantes que suman o restan, es decir,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \implies y \approx k \pm \frac{a}{b}(x-h),$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \implies y \approx k \pm \frac{b}{a}(x-h).$$

Esto sugiere que las rectas  $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ ,  $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$  son asíntotas oblicuas de la hipérbola correspondiente. En efecto, un cálculo rápido nos permite establecer que

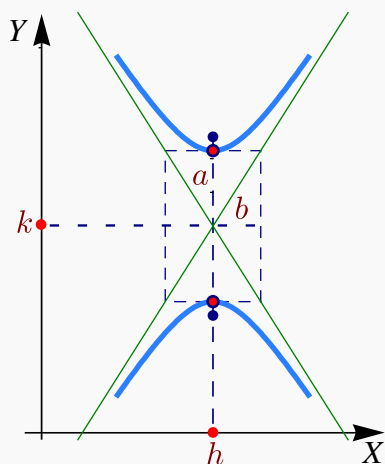
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y - \left( k \pm \frac{a}{b}(x-h) \right) = 0,$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y - \left( k \pm \frac{b}{a}(x-h) \right) = 0.$$

**Teorema 1.1 (Asíntotas de la hipérbola).**

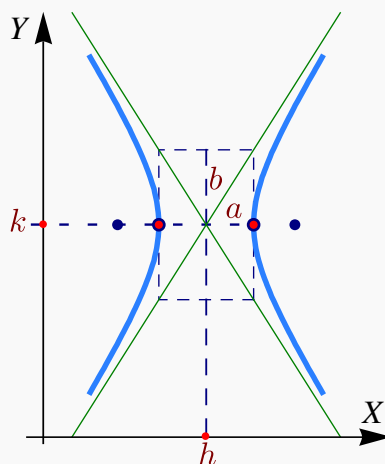
La hipérbola de ecuación  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$  tiene asíntotas

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h).$$

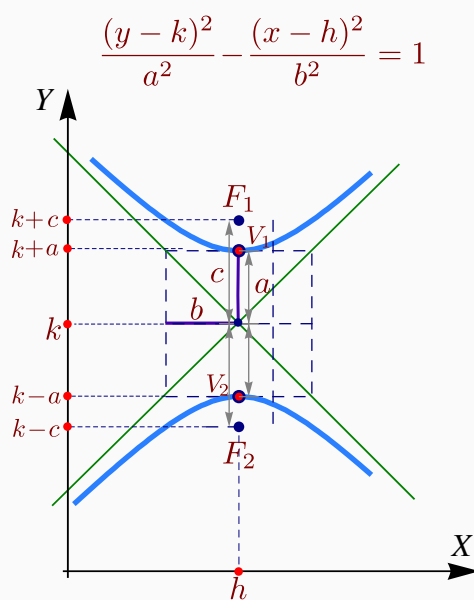
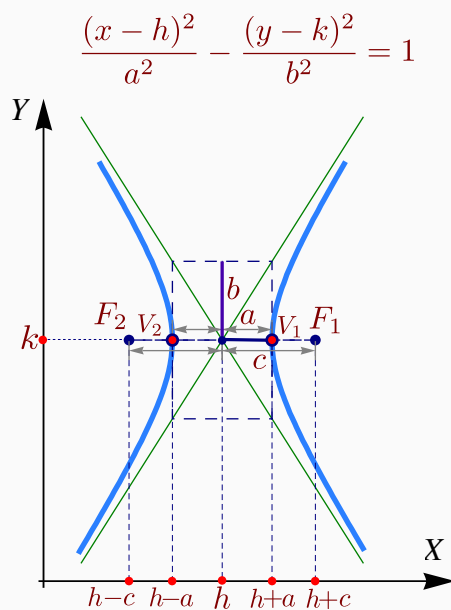


La hipérbola de ecuación  $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  tiene asíntotas

$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h).$$



En resumen,

**Hipérbolas.**

**Ecuación general de la hipérbola en posición estándar.** La ecuación general de una hipérbola con eje focal paralelo al eje  $X$  o al eje  $Y$  es  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , con  $A$  y  $C$  no nulos y de diferente signo. Sin embargo, esta ecuación puede también corresponder a una cónica degenerada. Si la ecuación corresponde a una cónica propia, basta con que  $AC < 0$  para decir que es una hipérbola. La manera práctica de decidir si es una hipérbola es obtener la ecuación canónica completando cuadrados. El estudio de la ecuación general se hace en la sección (1.6).

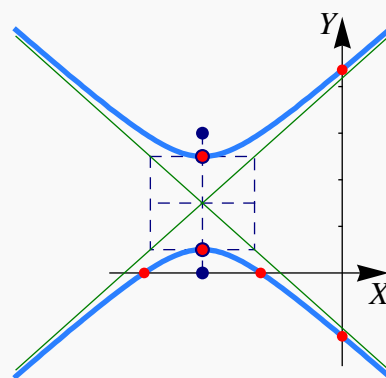
### Ejemplo 1.15

Determine la ecuación canónica y las características de la cónica que contiene a los puntos  $P = (x, y)$  para los cuales  $|d(P, A) - d(P, B)| = 2$  donde  $A = (-3, 0)$  y  $B = (-3, 3)$ . Realizar la gráfica.

**Solución:** Se trata de una hipérbola con focos  $A$  y  $B$  y por tanto  $c = 1.5$  y el centro es  $(h, k) = (-3, 3/2)$ . Como  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$  entonces  $a = 1$ , y entonces  $b^2 = 5/4$ . Luego ecuación canónica es

$$\frac{(y - \frac{3}{2})^2}{1} - \frac{(x + 3)^2}{5/4} = 1$$

Las asíntotas son  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{5/4}}(x + 3) + 3/2$ . La intersección con los ejes son  $y \approx -1.363$ ,  $y \approx 4.363$ ,  $x \approx -4.25$  y  $x \approx -1.75$ ,



### Ejemplo 1.16

Identifique y trace la gráfica de la cónica de ecuación  $4y^2 - 9x^2 + 36x - 24y - 36 = 0$ , indicando centro, vértices, focos, asíntotas e intersección con los ejes.

**Solución:** Completando cuadrados obtenemos

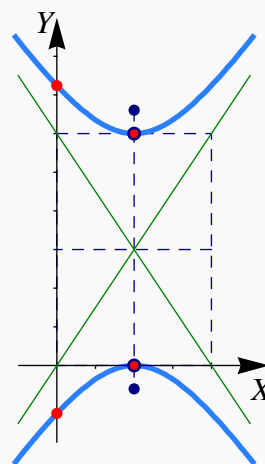
$$4(y - 3)^2 - 9(x - 2)^2 = 36$$

por lo que la ecuación canónica es

$$\frac{(y - 3)^2}{9} - \frac{(x - 2)^2}{4} = 1$$

Se trata de una hipérbola con eje transversal vertical y centro en  $(2, 3)$ . Como  $a = 3$  y  $b = 2$  entonces  $c = \sqrt{13}$ . Los vértices son  $v_1 = (2, 0)$  y  $v_2 = (2, 6)$  y los focos son  $F_1 = (2, 3 - \sqrt{13})$  y  $F_2 = (2, 3 + \sqrt{13})$ .

Las intersecciones con los ejes son  $y \approx -1.24$ ,  $y \approx 7.24$  y  $x = 2$ .



**Ejemplo 1.17**

Hallar la ecuación canónica, los focos, los vértices y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es  $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$ . Realizar la gráfica.

**Solución:** Completando el cuadrado en ambas variables,

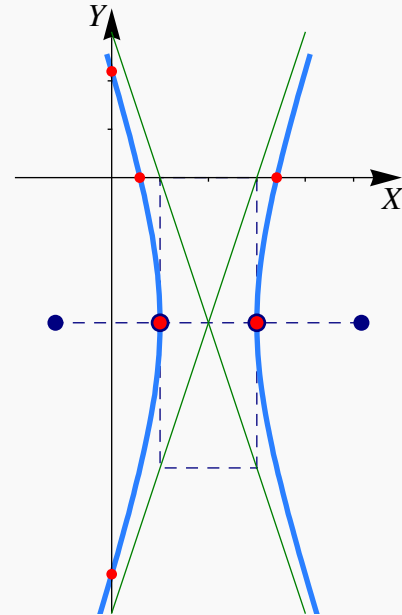
$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) - (y^2 + 6y + 9 - 9) + 18 = 0$$

$$9(x-2)^2 - (y+3)^2 = 9$$

$$\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Por tanto, el centro está en  $(2, -3)$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$  y  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$

Los vértices están en  $(1, -3)$ ,  $(3, -3)$ , los focos en  $(2 \pm \sqrt{10}, -3)$  y las asíntotas son  $y = \pm 3(x-2) - 3$ . Las intersecciones con los ejes son  $y \approx -8.19$ ,  $y \approx 2.196$ ,  $x \approx 0.58$  y  $x \approx 3.41$ .

**Ejemplo 1.18**

Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en  $(3, -5)$  y  $(3, 1)$  y asíntotas  $y = 2x - 8$  y  $y = -2x + 4$ . Además calcule los focos y realice la gráfica.

**Solución:** Como los vértices son vértices en  $(3, -5)$  y  $(3, 1)$ , el centro es  $(3, -2)$ . Además, la hipérbola tiene eje transversal vertical y  $a = 3$ . Por otro lado, por el teorema de las asíntotas,

$$m_1 = 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

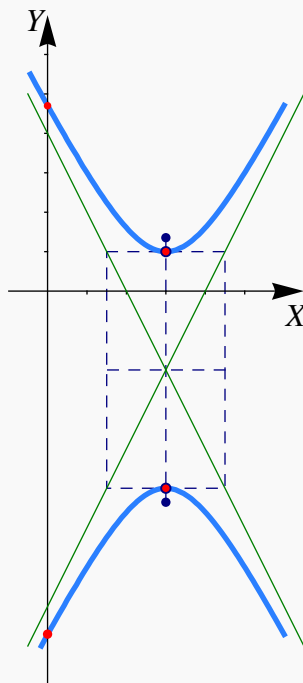
Por tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

El valor de  $c$  está dado por

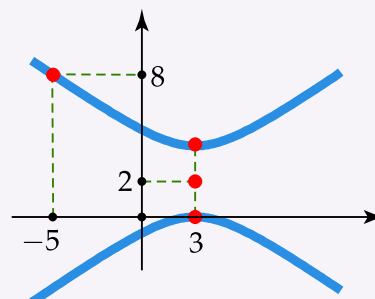
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Los focos están en  $(3, -2 - \frac{3\sqrt{5}}{2})$  y  $(3, -2 + \frac{3\sqrt{5}}{2})$ . Las intersecciones con el eje  $Y$  son  $y \approx -8.70$ ,  $y \approx 4.70$ .



### Ejercicios 3

**1.23** Considere la hipérbola de la figura. Determine su ecuación canónica.



**1.24** Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la hipérbola  $36x^2 - 64y^2 = 2304$

**1.25** Determine la ecuación canónica de la hipérbola con focos en  $(1, 4)$  y  $(1, -4)$  y con  $a = 3$ .

**1.26** Determine la ecuación canónica de la hipérbola con centro en  $(-4, 1)$  y un vértice en  $(2, 1)$  y semieje

conjugado (semieje menor) de longitud 4.

**1.27** Determine la ecuación canónica de la hipérbola de ecuación  $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ .

**1.28** Determine la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en  $(0, 2)$  y  $(6, 2)$  y asíntotas  $y = 2/3x \wedge y = 4 - 2/3x$ .

**1.29** Determine la ecuación canónica de la hipérbola que contiene al punto  $(4, 6)$  y cuyas asíntotas son  $y = \pm\sqrt{3}x$ .

**1.30** Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y que contiene los puntos  $(3, 1)$  y  $(9, 5)$ .

**1.31** Determine la ecuación canónica de la hipérbola que satisface simultáneamente las siguientes condiciones,

- a.) El centro de la hipérbola coincide con el vértice de la parábola de ecuación  $y^2 - 2y + 8x + 17 = 0$ .
- b.) Uno de sus focos se ubica en  $(3, 1)$
- c.) Uno de sus vértices se ubica en  $(1, 1)$ .

Realice la gráfica e indique sus principales características.

**1.32** Determine el tipo de cónica representada por la ecuación  $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-16} = 1$  en los casos

- a.) Si  $k > 16$
- b.) Si  $0 < k < 16$
- c.) Si  $k < 0$

**1.33** Realice el dibujo de la sección cónica de ecuación  $9(x-1)^2 - (y+1)^2 = 9$ . Indique además todas sus características.

## 1.6 Cónicas y la ecuación de segundo grado

Una cónica tiene ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1.2)$$

Sin embargo, hay casos en los que esta ecuación no tiene solución (no hay lugar geométrico) o el conjunto solución es una cónica degenerada (un punto, una o dos rectas).

En el caso de que tengamos una cónica no degenerada con ecuación 1.2, clasificar la cónica obteniendo la ecuación canónica: Si  $B = 0$ , solo habría que completar cuadrados. Si  $B \neq 0$ , habría que aplicar una rotación de ejes y luego completar cuadrados, con estos cálculos obtenemos la ecuación canónica de la cónica (en un nuevo sistema  $X'Y'$ ) y sus características más importantes (centro, vértice(s), etc.).

**Invariantes.** Usando la teoría de *invariantes* (ver Apéndice A.) podemos identificar la cónica, sin atender a sus elementos, directamente aplicando el siguiente teorema,

### Teorema 1.2

Consideremos la ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Entonces,

- a.) si  $B^2 - 4AC = 0$  y  $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \neq 0$ , tenemos una parábola,
- b.) si  $B^2 - 4AC < 0$  y  $(A + C)(4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2) < 0$ , tenemos una elipse,
- c.) si  $B^2 - 4AC > 0$  y  $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \neq 0$ , tenemos una hipérbola.

Si definitivamente se sabe que la ecuación general corresponde a una cónica propia, entonces

- a) si  $B^2 - 4AC = 0$ , tenemos una parábola,
- b) si  $B^2 - 4AC < 0$ , tenemos una elipse,
- c) si  $B^2 - 4AC > 0$ , tenemos una hipérbola.

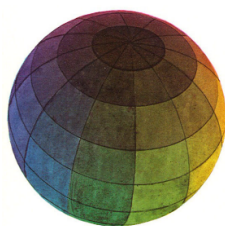
Una exposición más detallada se puede ver en el apéndice 8.1.

### Ejemplo 1.19

Clasificar la cónica de ecuación  $2x^2 - 5y^2 - xy + 3y + 1 = 0$ .

**Solución:** . En este caso  $A = 2$ ,  $B = -1$ ,  $C = -5$ ,  $D = 0$ ,  $E = 3$  y  $F = 1$ . Ahora calculamos,

$B^2 - 4AC = 41 > 0$  y  $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = -59 \neq 0$ , por tanto se trata de una hipérbola.



Versión actualizada de este libro:  
<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/>



Espacio tridimensional. Coordenadas cartesianas.  
Funciones de dos variables  
Superficies en  $\mathbb{R}^3$   
Superficies cuadráticas.  
Sólidos simples  
Proyección ortogonal de un sólido simple  
(\*) Definición formal de una superficie

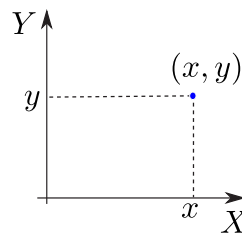
## 2 — Superficies y Sólidos.

### 2.1 Espacio tridimensional. Coordenadas cartesianas.

Una vez que se ha especificado una unidad de medida, un número  $x \in \mathbb{R}$  puede ser usado para representar un punto en una línea, un par  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se puede usar para representar un punto en un plano,



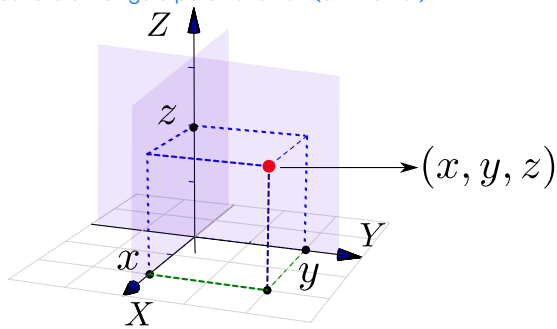
(a) Punto en una línea



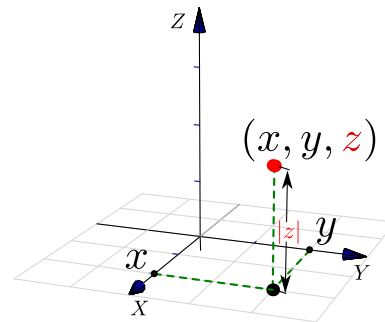
(b) Punto en el plano

De manera análoga, un triple  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  se puede usar para representar un punto en el espacio tridimensional. Tomamos un punto fijo cualquiera  $O$ , llamado *origen*, y tres planos distintos, mutuamente perpendiculares, que pasan por  $O$ . Los planos se intersectan en pares en tres rectas (ejes) mutuamente perpendiculares que pasan por  $O$  llamadas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Para hacer la representación en un plano podemos trazar el eje  $Y$  y el eje  $Z$  de frente y la parte positiva del eje  $X$  se representa en una dirección aproximadamente sur-oeste, para simular profundidad (perspectiva). Dibujamos  $(x, y)$  en el plano  $XY$  y, desde este punto, dibujamos un segmento paralelo al eje  $Z$  y orientado de acuerdo al signo de  $z$  y de longitud  $|z|$ , como se muestra en la figura (b) de arriba. [Si tiene conexión a Internet, puede hacer clic en la figura](#), esto lo llevará a una página Web con un 'applet' con el que se podrá hacer una idea más clara.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



(a) Coordenadas cartesianas



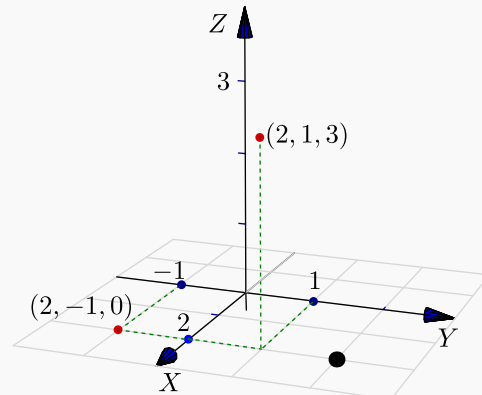
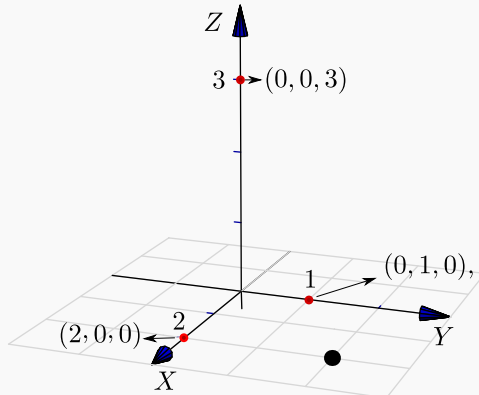
(b) Punto  $P = (x, y, z)$

**Figura 2.1:** Puntos en el espacio tridimensional. Puede conectarse a Internet, y arrastrar con el mouse los puntos rojos

### Ejemplo 2.1

Los puntos en el eje  $X$  tienen coordenadas  $(x, 0, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , los puntos en el eje  $Y$  tienen coordenadas  $(0, y, 0)$ ,  $y \in \mathbb{R}$  y los puntos en el eje  $Z$  tienen coordenadas  $(0, 0, z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . En la figura que sigue se muestran cinco ejemplos de puntos en el espacio.

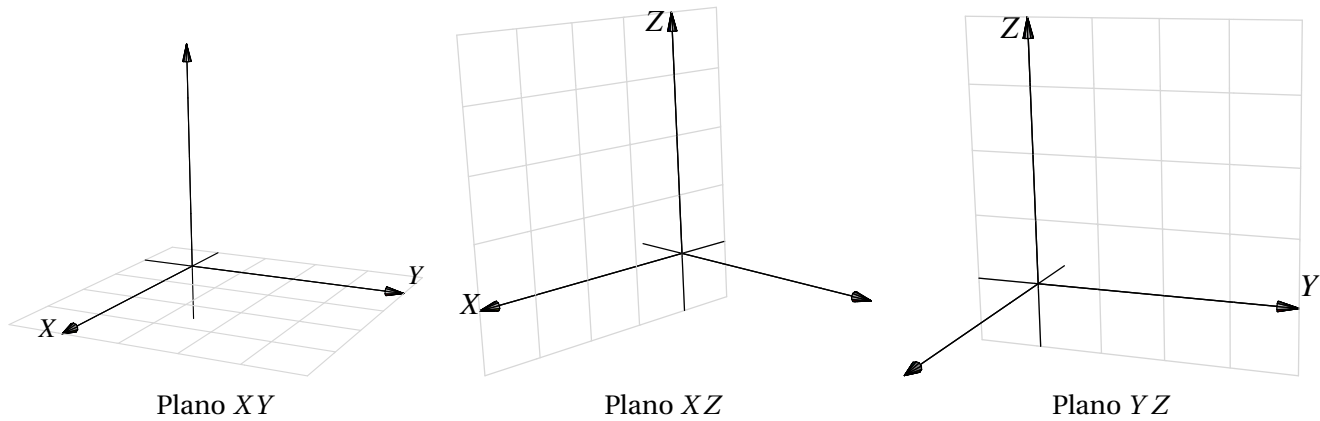
● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 2.2:** Puntos  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$ ,  $(2, 1, 3)$  y  $(2, -1, 0)$ .

**Planos  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$ .** Hay tres planos que contienen un par de ejes coordenados: El plano  $XY$  es el plano que contiene el eje  $X$  y el eje  $Y$ , el plano  $XZ$  es el plano que contiene el eje  $X$  y el eje  $Z$  y el plano  $YZ$  es el plano que contiene el eje  $Y$  y el eje  $Z$ .

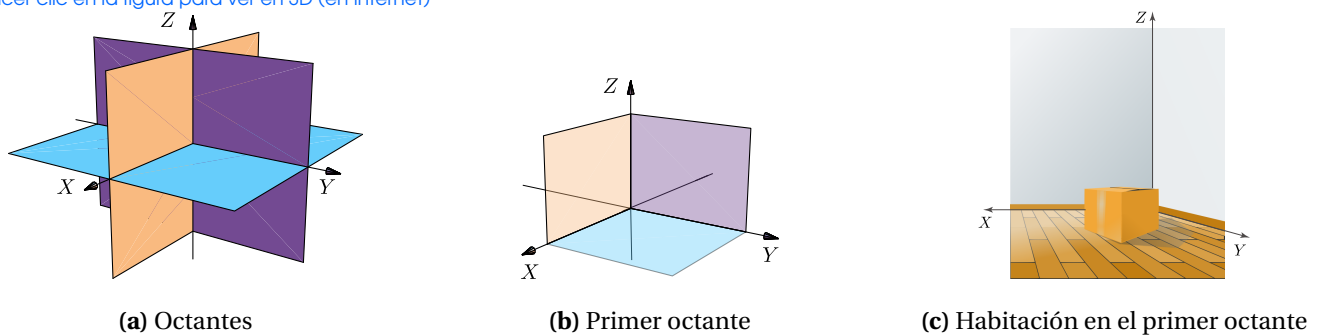
[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 2.3**

**El primer octante.** Los planos  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$  dividen el espacio en ocho partes llamadas *octantes*. El primer octante corresponde a la parte positiva de los ejes.

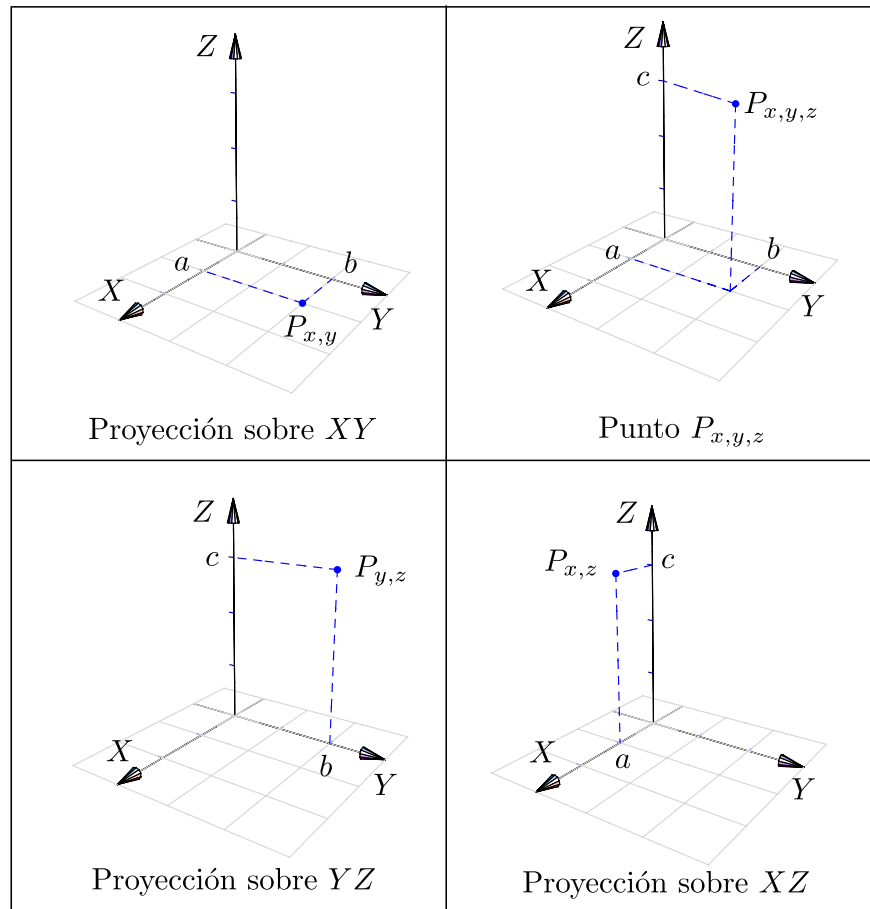
[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 2.4**

**Vistas isométricas de un punto.** Considere el punto  $P_{x,y,z} = (a, b, c)$  en el espacio tridimensional, se define *la vista* de este punto en el plano  $XY$  como el punto  $P_{x,y} = (a, b, 0)$ . Análogamente se define la vista en el plano  $YZ$  como  $P_{y,z} = (0, b, c)$  y la vista en el plano  $XZ$  como  $P_{x,z} = (a, 0, c)$ .

Estas vistas también se denominan “proyecciones perpendiculares” del punto en el plano respectivo.



## 2.2 Funciones de dos variables

### Definición 2.1

Una función de dos variables  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , asigna a cada par  $(x, y) \in D$ , un único número real denotado con  $f(x, y)$ . El gráfico de  $f$  es el conjunto  $\{(x, y, z) : x, y \in D \text{ y } z = f(x, y)\}$ .

El criterio (fórmula) que define a  $f$  puede ser explícito o implícito. Para hablar de una función de dos variables se escribe  $z = f(x, y)$  o  $F(x, y, z) = 0$ .

### Ejemplo 2.2

- Forma explícita:  $z = x^2 + y^2$  o equivalentemente  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

- Forma implícita:  $\overbrace{z^2 + y^2 + z^2 - 1}^{F(x,y,z)} = 0; z \geq 0$ .

La **representación gráfica** de  $f$  corresponde a la representación de todos los puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen la ecuación  $z = f(x, y)$  o  $F(x, y, z) = 0$ .

Como en funciones de una variable, el **dominio máximo** de  $f$  es el conjunto de puntos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $z = f(x, y)$  este bien definida.

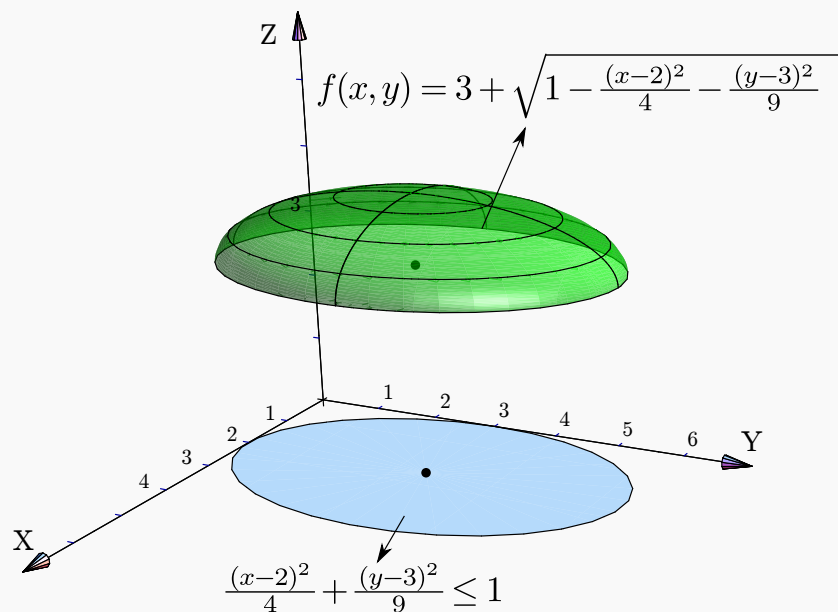
### Ejemplo 2.3

Consideremos la función  $f(x, y) = 3 + \sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9}}$ . La función está bien definida si el subradical  $1 - (x-2)^2/4 - (y-3)^2/9 \geq 0$ , entonces el dominio máximo de esta función es el conjunto

$$D_f = \{(x, y) : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} \leq 1\},$$

es decir,  $D_f$  es la región encerrada por la elipse  $(x-2)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$  (incluido el borde).

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



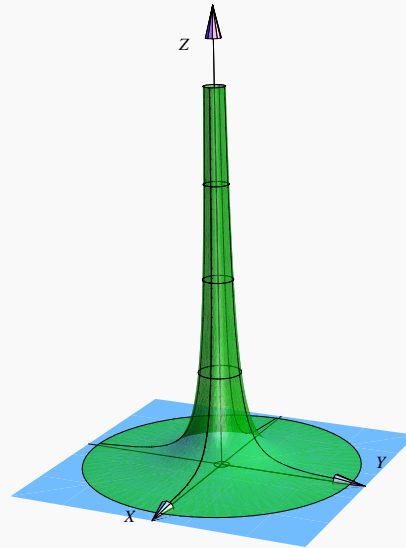
**Figura 2.5:** Dominio de la función  $f(x, y) = 3 + \sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9}}$  (en celeste)

**Ejemplo 2.4**

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

La función  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$  solo se indefine en  $(0, 0)$ , entonces el dominio máximo de esta función es el conjunto

$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$



**Figura 2.6:** Dominio de la función  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$  (en celeste)

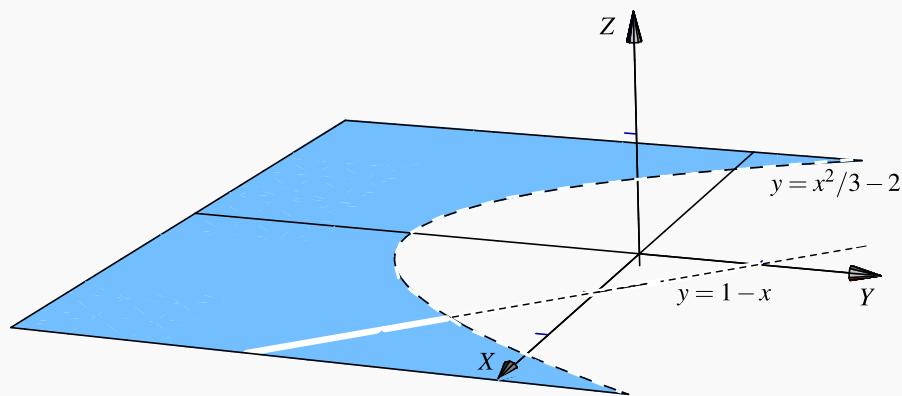
**Ejemplo 2.5**

Considere la función  $f(x, y) = \frac{\log(x^2 - 3(y + 2))}{x + y - 1}$ .

- Determine el dominio de la función  $f$ .
- Realizar la representación gráfica de este dominio.

**Solución:**

- $x^2 - 3(y + 2) > 0 \implies y < \frac{x^2}{3} - 2$ . Esto corresponde a la región por debajo de la parábola  $y = \frac{x^2}{3} - 2$ . Los puntos de la parábola no están en el dominio, por eso se dibuja “punteada”.
- $x + y - 1 \neq 0 \implies y \neq 1 - x$ . Los puntos de esta recta no están en el dominio.
- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{x^2}{3} - 2 \wedge y \neq 1 - x\}$



**Figura 2.7:** Dominio de la función  $f(x, y) = \frac{\log(x^2 - 3(y+2))}{x + y - 1}$ .

### Ejemplo 2.6

Consideremos la función  $f(x, y) = \frac{2x+3}{\sqrt{y-x-2}}$ .

- Determine el dominio de la función  $f$ .
- Realizar la representación gráfica de este dominio.

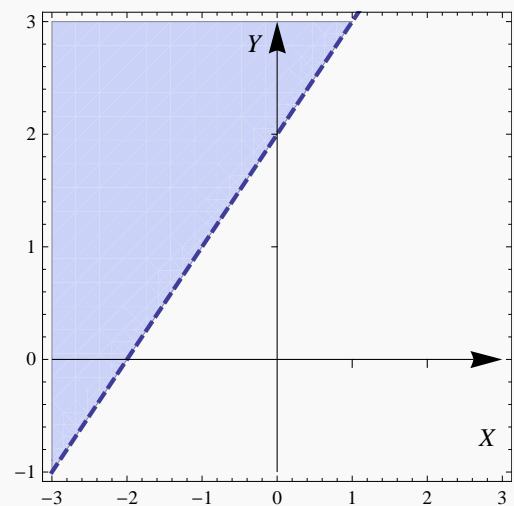
#### Solución:

Los puntos  $(x, y)$  que están en el dominio son puntos tales que  $y - x - 2 > 0$ . Así que dominio máximo es

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y > x + 2\}.$$

Esto corresponde a la región que está sobre la recta  $y = x + 2$ .

La representación gráfica de este dominio corresponde a la región que está por encima de la recta  $y = x + 2$  y se debe excluir la recta, por eso se dibuja "punteada".

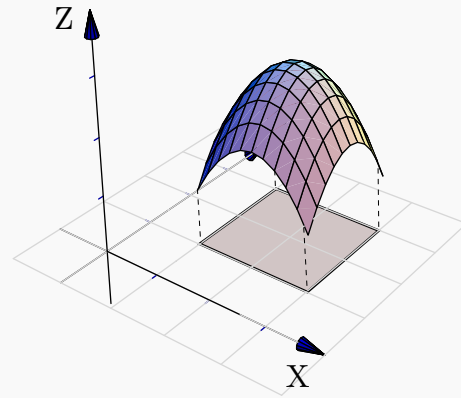


**Figura 2.8:** Dominio de la función  $f(x, y) = \frac{2x+3}{\sqrt{y-x-2}}$ .

**Ejemplo 2.7**

Consideremos la función  $f(x, y) = 3 - (x - 2)^2 - (y - 2)^2$ . Su dominio máximo es  $\mathbb{R}^2$ . Frecuentemente hacemos la representación gráfica de  $f$  sobre un *dominio restringido*, por ejemplo sobre el conjunto  $D = [1, 3] \times [1, 3]$ ,

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 2.9:** Función  $f$  restringida al un rectángulo  $D = [1, 3] \times [1, 3]$

**4****Ejercicios**

**2.1** Considere la función  $f(x, y) = \frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2 - 1}}{xy}$ . Indique el dominio máximo de  $f$  y realice la representación gráfica.

**2.2** Considere la función  $f(x, y) = \frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2 - 1}}{\log(x+y-2)}$ . Indique el dominio máximo de  $f$  y realice la representación gráfica.

**2.3 Superficies en  $\mathbb{R}^3$** 

Nos interesan las superficies de ecuación  $z = f(x, y)$ , es decir, las superficies formadas por los puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen la ecuación  $z = f(x, y)$  o también en la forma  $F(x, y, z) = 0$ .

A veces decimos “superficie de ecuación (explícita)  $z = f(x, y)$ ” o “superficie de ecuación (implícita)  $F(x, y, z) = 0$ ”. Como sugiere el ejemplo 2.2, un bosquejo de una superficie se puede hacer con un conjunto de curvas; a estas curvas se les llama ‘trazas’ o ‘cortes verticales y horizontales’. En esta sección vamos a ocuparnos con superficies simples: Planos, superficies cilíndricas y superficies cuádricas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Un cono es una superficie si removemos el vértice.



### Curvas en el espacio.

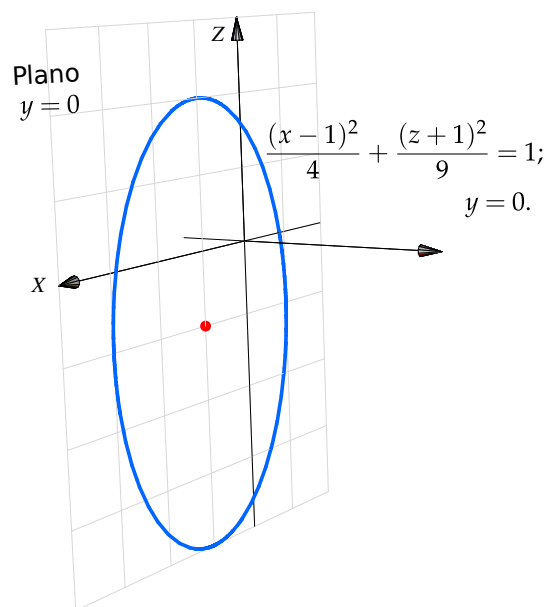
Una manera de describir una curva en el plano  $XY$  es por medio de su ecuación cartesiana  $F(x, y) = c$ . Por ejemplo, una circunferencia de radio  $a$  tiene ecuación:  $x^2 + y^2 = a^2$ . Desde este punto de vista, una curva  $C$  definida por esta ecuación es un conjunto de puntos, a saber,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = c\}$$

Las curvas en  $\mathbb{R}^3$  podrían ser definidas por un par de ecuaciones (como intersección de dos superficies),

$$F_1(x, y, z) = c_1; \quad F_2(x, y, z) = c_2,$$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

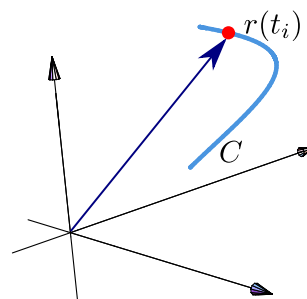


Por ejemplo, en el espacio tridimensional, la elipse de ecuación  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1$  (en el plano  $XZ$ ) tendría ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1; \quad y=0.$$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Ecuación paramétrica.** Otra manera de definir una curva es como el lugar geométrico de un punto en movimiento,  $r(t)$  es la posición del punto en el instante  $t$ . La curva es descrita por una función  $r(t)$  de parámetro  $t$ . Para curvas planas:  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ . Para curvas en el espacio  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ .



**Ejemplo 2.8**

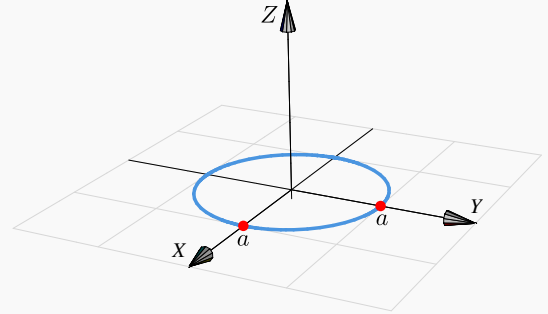
En el espacio tridimensional, una circunferencia en el plano  $XY$ , de radio  $a$  y centrada en el origen se puede describir de varias maneras, por ejemplo,

- Ecuación cartesiana:  $x^2 + y^2 = a^2$ ;  $z = 0$ .

- Una ecuación paramétrica:

$$r(t) = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + 0 \cdot \hat{k}; \quad t \in [0, 2\pi].$$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Curvas en los planos  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$ .** En general, " $F(x, y) = 0$ ;  $z = 0$ " es la ecuación de una curva en el plano  $XY$ . De manera análoga, " $F(x, z) = 0$ ;  $y = 0$ " corresponde a una curva en el plano  $XZ$  y " $F(y, z) = 0$ ;  $x = 0$ " corresponde a una curva en el plano  $YZ$ .

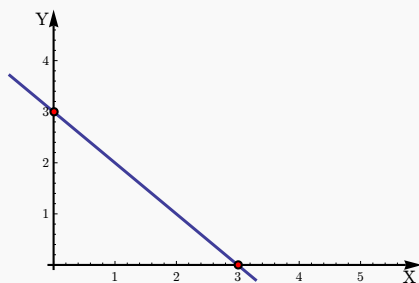
**Ejemplo 2.9**

Realizar la representación gráfica, en el espacio, de la curva  $C_1 : x + y = 3$ ;  $z = 0$

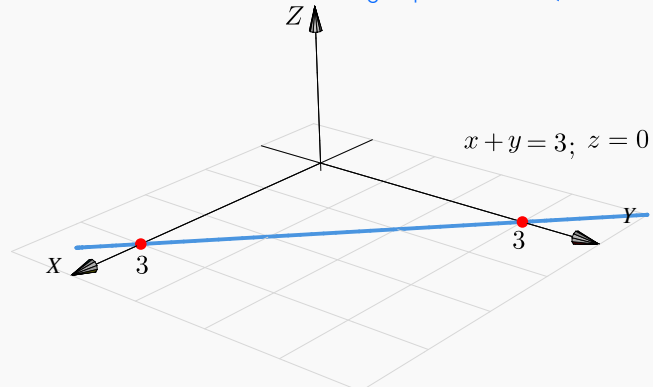
**Solución:**

- La curva  $C : x + y = 3$ ;  $z = 0$ , corresponde a una recta en el plano  $XY$ . Interseca al eje  $X$  en  $x = 3$  y al eje  $Y$  en  $y = 3$ .
- Una parametrización es  $x(t) = t$ ,  $y(t) = 3 - t$  y  $z(t) = 0$ , es decir,  $C : r(t) = t \hat{i} + (3 - t) \hat{j} + 0 \cdot \hat{k}; \quad t \in \mathbb{R}$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 2.10:** Recta  $x + y = 3$  en el plano  $XY$



**Figura 2.11:** Recta  $x + y = 3$  en el espacio tridimensional

**Ejemplo 2.10**

Realizar la representación gráfica, en el espacio, de la curva  $C : (x-2)^2 + (z-2)^2 = 1; y = 0$ .

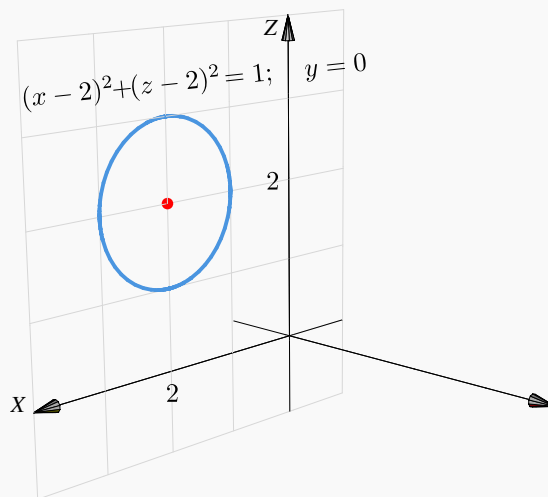
**Solución:**

- La curva  $C : (x-2)^2 + (z-2)^2 = 1; y = 0$  corresponde a una circunferencia de radio 1 en el plano  $XZ$ . Su centro es  $(2, 0, 2)$ .

- Una parametrización es

$$C : r(t) = (2 + \cos t) \hat{i} + 0 \cdot \hat{j} + (2 + \sin t) \hat{k}; \quad t \in [0, 2\pi]$$

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Ejemplo 2.11**

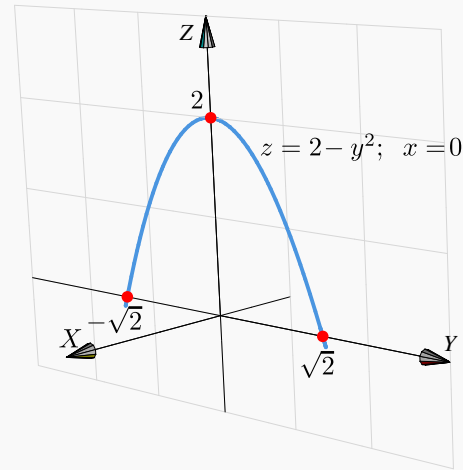
Realizar la representación gráfica, en el espacio, de la curva  $C_3 : z = 2 - y^2; x = 0$ .

**Solución:**

 [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

- La curva  $C_3$  es la parábola :  $y^2 = -(z-2)$  (cóncava hacia abajo) en el plano  $YZ$ . El vértice es  $(0,0,2)$  e interseca al eje  $X$  en  $x = \sqrt{2}$  y  $x = -\sqrt{2}$ .
- Una parametrización es

$$C : r(t) = 0 \cdot \hat{i} + t \cdot \hat{j} + (2 - t^2) \cdot \hat{k}; \quad t \in \mathbb{R}$$



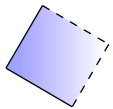
## 5 Ejercicios

**2.3** Realizar la representación gráfica, en el espacio, de las curvas

- $z = 4 - x^2; \quad y = 0.$
- $(z-2)^2 + (y-2)^2 = 4; \quad x = 0.$
- $\frac{(y-1)^2}{4} + x^2 = 1; \quad z = 0.$
- $z + 2y = 4; \quad x = 0.$

**2.4** ¿Es  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 0$  la ecuación de una curva?

### Planos



Posiblemente los planos son las superficies más sencillas de dibujar. La ecuación cartesiana de un plano es  $ax + by + cz = d$  con  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  (se prohíbe el caso  $a = b = c = 0$ ). Para realizar la representación gráfica de un plano  $\Pi$  nos basamos en el hecho de que si  $P, Q$  son dos puntos en este plano, entonces la recta (o cualquier segmento de ella) que contiene a estos puntos, está en el plano. En la práctica necesitamos al menos dos segmentos de recta para dibujar una parte del plano, mediante un triángulo o un paralelogramo.

### Planos de ecuación cartesiana con dos variables ausentes.

La ausencia de variables en la ecuación solo significa que estas variables tienen coeficiente nulo y, por tanto, estas variables pueden tomar valores arbitrarios.

Por ejemplo el plano  $\Pi: 0 \cdot x + 0 \cdot y + z = 2$  es el plano  $z = 2$ , es decir,  $\Pi = \{(x, y, 2) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

De aquí en adelante,

- El plano  $x = a$  es el plano  $\Pi = \{(a, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ .
- El plano  $y = b$  es el plano  $\Pi = \{(x, b, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ .
- El plano  $z = c$  es el plano  $\Pi = \{(x, y, c) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

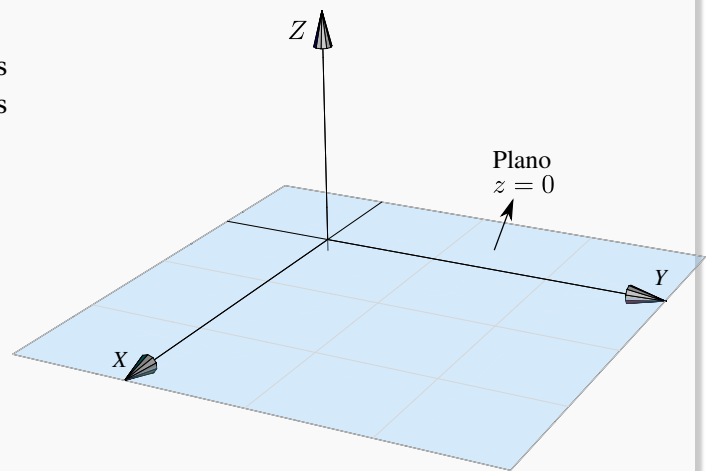
### Ejemplo 2.12

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

- El plano  $\Pi: z = 0$  lo constituyen todos los puntos de la forma  $(x, y, 0)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$  arbitrarios, es decir, el plano  $z = 0$  es el plano  $XY$ .

- Una parametrización es

$$\Pi: r(t, s) = t \hat{i} + s \hat{j} + 0 \cdot \hat{k}, \quad (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$



### Ejemplo 2.13

Dibujar el plano  $z = 2$ .

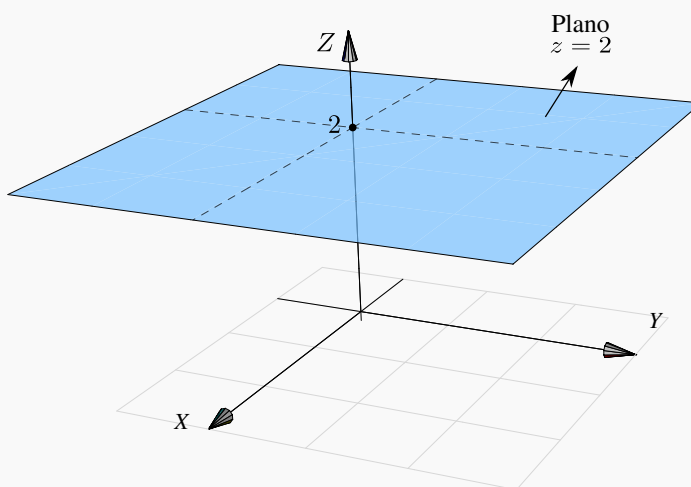
**Solución:**

- El plano  $z = 2$  lo constituyen todos los puntos de la forma  $(x, y, 2)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$  arbitrarios, es decir, es un plano paralelo al plano  $XY$  que pasa por la coordenada  $z = 2$ .

- Una parametrización es

$$\Pi: r(t, s) = t \hat{i} + s \hat{j} + 2 \cdot \hat{k}, \quad (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



### Ejemplo 2.14

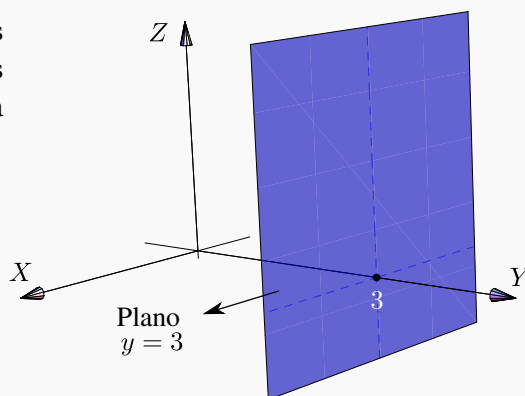
Dibujar el plano  $y = 3$ .

**Solución:**

- El plano  $\Pi: y = 3$  lo constituyen todos los puntos de la forma  $(x, 3, z)$  con  $x, z \in \mathbb{R}$ , es decir, es un plano paralelo al plano  $YZ$  que pasa por la coordenada  $y = 3$ .
- Una parametrización es

$$\Pi: r(t, s) = t \hat{i} + 3 \cdot \hat{j} + s \hat{k}, \quad (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



### Planos de ecuación cartesiana con una variable ausente.

Cuando hay una variable ausente (*i.e.*, una variable con coeficiente nulo), el plano está ‘generado’ por la recta determinada por las variables presentes.

**Ejemplo 2.15**

Dibujar el plano  $x + y = 2$ .

**Solución:**

- El plano  $\Pi : x + y = 2$  es el conjunto de puntos

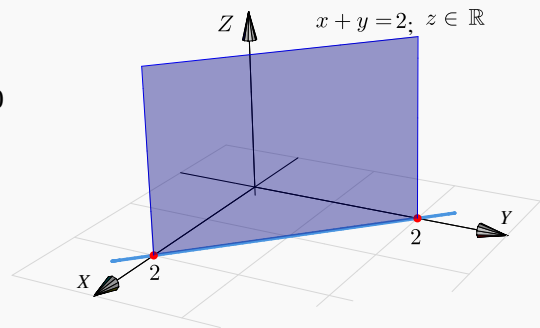
$$\{(x, y, z) : x + y = 2, z \in \mathbb{R}\}$$

Las coordenadas  $x$  e  $y$  están sobre la recta  $x + y = 2, z = 0$  y la coordenada  $z$  es arbitraria.

- Una parametrización es

$$\Pi : r(t, s) = t \hat{i} + (2 - t) \hat{j} + s \hat{k}, \quad (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Ejemplo 2.16**

Dibujar el plano  $y + z = 3$ .

**Solución:**

- El plano  $\Pi : y + z = 3$  es el conjunto de puntos

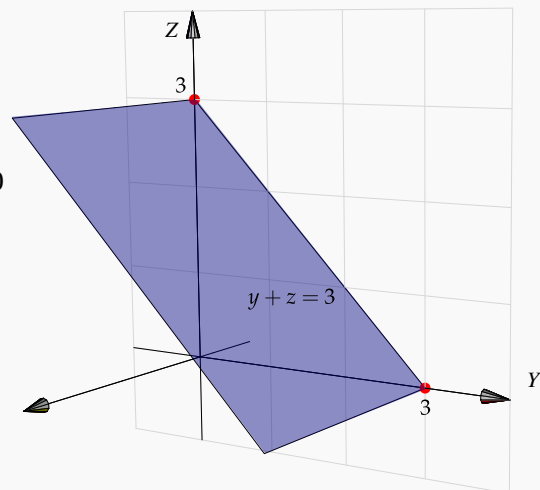
$$\{(x, y, z) : y + z = 3, x \in \mathbb{R}\}$$

Las coordenadas  $y$  y  $z$  están sobre la recta  $y + z = 3, x = 0$  y la coordenada  $x$  es arbitraria.

- Una parametrización es

$$\Pi : r(t, s) = t \hat{i} + s \hat{j} + (3 - s) \hat{k}, \quad (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Planos de ecuación cartesiana sin variables ausentes.** Podemos distinguir entre los que pasan por el origen y los que no.

Una forma sencilla para dibujar planos que *no* contienen el origen consiste en determinar la intersección del plano

con cada eje coordenado y trazar los segmentos de recta que unen estos puntos. En caso necesario, se pueden extender dos de estos segmentos y formar un paralelogramo.

### Ejemplo 2.17

Dibujar el plano  $4x - 4y + 2z = 4$

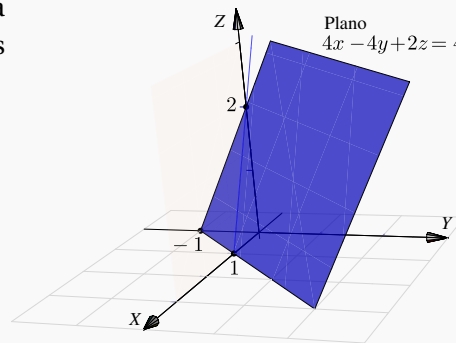
#### Solución:

- El plano interseca a los ejes coordenados en  $x = 1$ ,  $y = -1$  y  $z = 2$ . Podemos usar el segmento que va de  $x = 1$  a  $y = -1$  y el segmento que va de  $y = -1$  a  $z = 2$ . Con estos dos segmentos podemos dibujar un paralelogramo.

- Como los puntos  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, -1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 2)$  están en el plano, una parametrización es

$$\begin{aligned}\Pi: r(t, s) &= A + t \cdot (B - A) + s \cdot (C - A) \\ &= t \hat{i} + (t + s - 1) \hat{j} + 2s \hat{k}; \quad s, t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



**Planos que contienen el origen.** Para dibujar planos que contienen el origen se anula una de las variables y se dibuja una primera recta resultante en el plano correspondiente. Luego se anula otra variable y se dibuja una segunda recta en el plano correspondiente. Tomamos dos segmentos, uno en cada recta y formamos un paralelogramo.

### Ejemplo 2.18

Dibujar el plano  $x + y - 2z = 0$ .

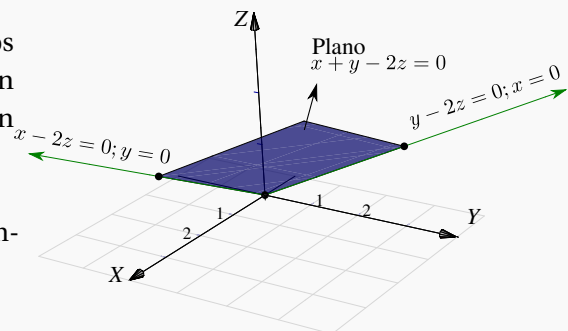
#### Solución:

- Como el plano  $x + y - 2z = 0$  pasa por el origen, podemos usar un segmento de la recta  $x - 2z = 0$ ;  $y = 0$  y un segmento de la recta  $y - 2z = 0$ ;  $x = 0$ , para dibujar un paralelogramo que represente al plano.

- Para obtener una parametrización, podemos usar los puntos del plano  $A = (3, 0, 1.5)$ ,  $B = (0, 0, 0)$ ,  $C = (0, 3, 1.5)$ ,

$$\begin{aligned}\Pi: r(t, s) &= A + t \cdot (B - A) + s \cdot (C - A) \\ &= 3t \hat{i} + 3s \hat{j} + 1.5(s + t) \hat{k}; \quad s, t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)





**2.5** Dibujar los planos que se indican a continuación:

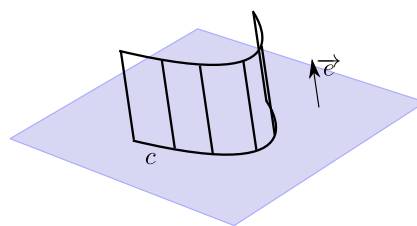
- a.)  $2z + y = 2$
- b.)  $x = 2$
- c.)  $x - y - z = 0$
- d.)  $x + y - z = 2$
- e.)  $2x + 2y + 2z = 2$

**2.6** Dibujar el plano  $4x - 4y + 2z = 4$  en el primer octante.

### Superficies cilíndricas o “cilindros”.

El término “cilindro” tiene varios significados relacionados y puede ser un concepto algo confuso. La palabra “cilindro” probablemente evoque la imagen de un cilindro circular recto, pero en cálculo en varias variables *un cilindro* (cilindro generalizado) se refiere a una superficie generada por una curva: Un cilindro es una superficie formada por una familia de rectas paralelas, llamadas *generatrices*, que pasan por los puntos respectivos de una cierta curva *directriz*. Si la directriz vive en un plano y si la generatriz es perpendicular a este plano, el cilindro se le dice “cilindro recto”. Un cilindro es un caso particular de una superficie *reglada*.

En este libro solo se consideran cilindros (generalizados) de ecuación  $r(t, s) = c(t) + s \cdot \vec{e}$ ;  $t \in I$ ,  $s \in \mathbb{R}$  donde  $c(t)$  es la parametrización de una curva que está en alguno de los plano  $XY$ ,  $YZ$  o  $XZ$  y  $\vec{e}$  es un vector perpendicular al plano correspondiente.

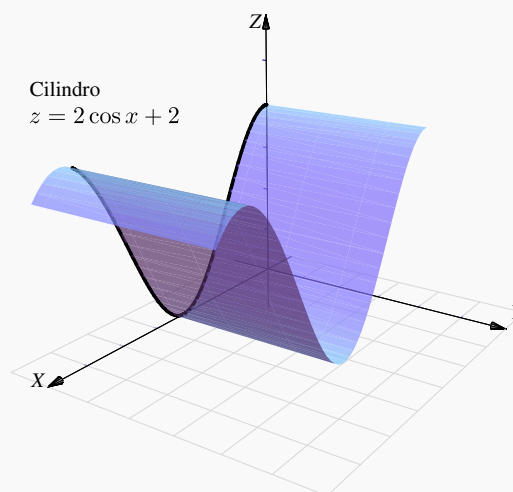
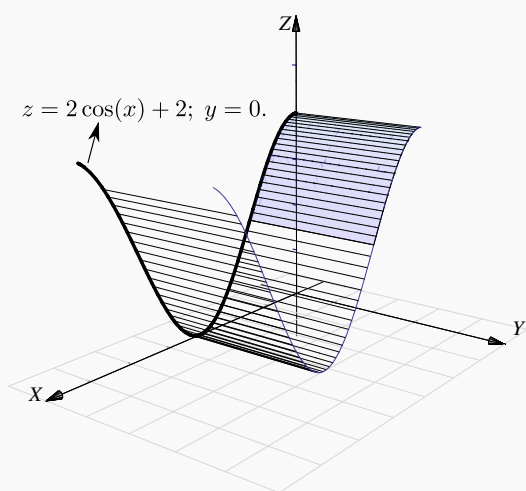


Es decir, en nuestro caso, las superficies con ecuación en *dos* de las tres variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  van a ser cilindros rectos, con línea generatriz paralela al eje asociado con la variable ausente (**en este libro, la línea generatriz es el eje asociado a la variable ausente!**). Por ejemplo, el cilindro de ecuación  $z = 1 - x^2$  tiene generatriz paralela al eje  $Y$  mientras que el cilindro  $y^2 + (z - 1)^2 = 1$  tiene generatriz paralela al eje  $X$ .

### Ejemplo 2.19

Para dibujar el cilindro de ecuación  $z = 2\cos(x) + 2$  primero deberíamos dibujar la curva de ecuación  $z = 2\cos(x) + 2$ ;  $y = 0$ . Luego, según nuestro convenio, la superficie cilíndrica  $z = 2\cos(x) + 2$  tiene línea generatriz paralela al eje  $Y$ . Para obtener una parametrización de esta superficie, tomamos  $x = t$  y  $z = 2\cos(x) + 2$ .  $y = s$  es libre.  $r(t, s) = (t, s, 2\cos t + 2)$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ ,

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

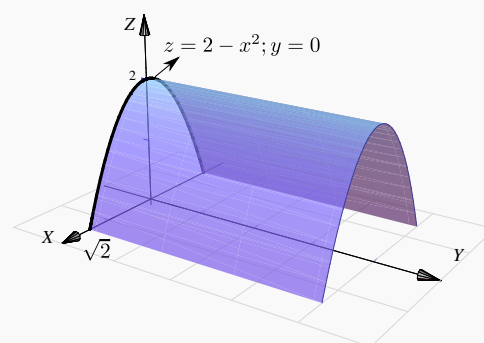


### Ejemplo 2.20

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

El cilindro de ecuación  $z = 2 - x^2$  es una superficie cilíndrica generada por la parábola  $z = 2 - x^2, y = 0$ ; con línea generatriz paralela al eje  $Y$ .

Para obtener una parametrización de esta superficie, usamos la ecuación de la curva en el plano  $XZ$ , tomamos  $x = t$  y  $z = 2 - t^2$ . La coordenada  $y = s$  es libre.  $r(t, s) = (t, s, 2 - t^2)$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ .



### Ejemplo 2.21

Dibujar el cilindro de ecuación  $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ .

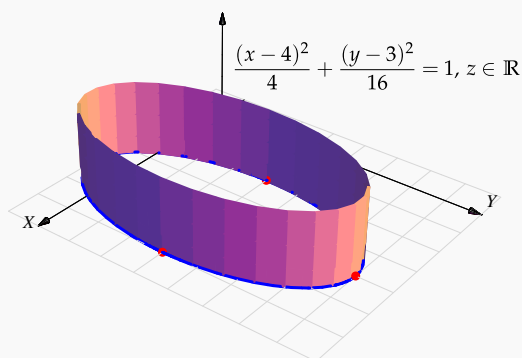
**Solución:** La superficie cilíndrica generada por la elipse de ecuación  $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$  tiene su línea generatriz paralela al eje  $Z$ .

Una parametrización de esta superficie es

$$r(t, s) = (4 + 2 \cos t, 3 + 4 \sin t, s), \quad t \in [0, 2\pi], \quad s \in \mathbb{R}.$$

Aquí tomamos  $x(t) = 4 + 2 \cos t$  y  $y(t) = 3 + 4 \sin t$ .  $z = s$  es libre.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

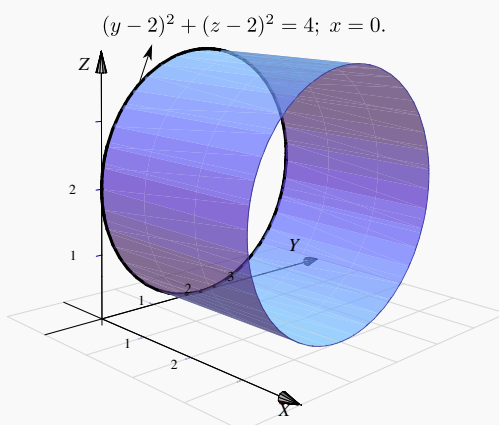


### Ejemplo 2.22

Dibujar el cilindro de ecuación  $(y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$ .

**Solución:** La superficie cilíndrica generada por la circunferencia  $(y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$  tiene su línea generatriz paralela al eje  $X$ . Una parametrización de esta superficie es  $r(t, s) = (2 + 2 \cos t, s, 2 + 2 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . La circunferencia en el plano  $XZ$  se parametriza con  $x = 2 + 2 \cos t$  y  $z = 2 + 2 \sin t$ .  $y = s$  es libre.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



## 2.4 Superficies cuadráticas.

Rotar una cónica (no degenerada) alrededor de su eje focal, por ejemplo, produce un caso especial de un conjunto más general de superficie llamadas *superficies de segundo orden*. Estas superficies satisfacen una ecuación de segundo grado en  $x$ ;  $y$  y  $z$  y también son llamadas *superficies cuadráticas* o *cuádricas*.

La curva de intersección entre un plano y una superficie cuadrática es una cónica. Hay 17 tipos estándar de cuádricas, algunas de ellas son: paraboloides, esfera, esferoide, elipsoide, cono, hiperboloides, cilindro, cono elíptico, cilindro elíptico, hiperboloides elíptico, paraboloides elíptico, etc.

Aquí solo consideramos cuádricas en posición estándar (sin rotación). Estas superficies tienen ecuación

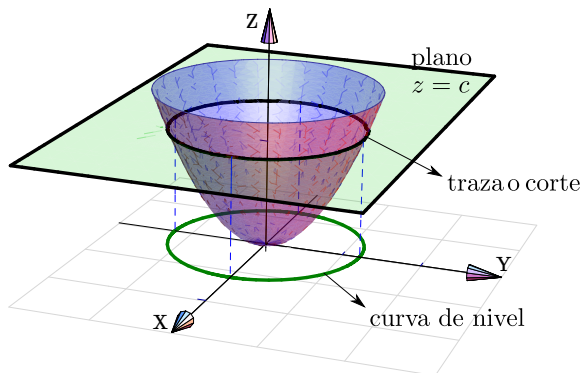
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

### Curvas de nivel y trazas.

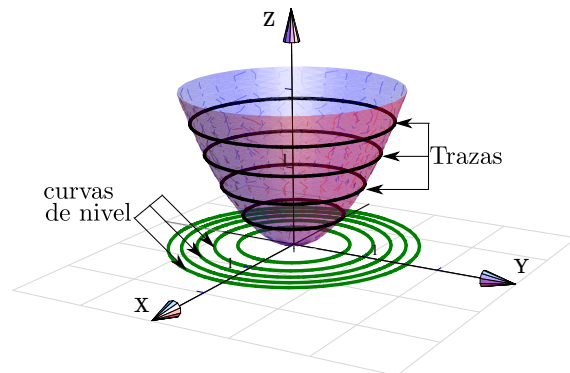
Si  $S$  es una superficie en el espacio de ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , todos los pares  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfacen la ecuación  $F(x, y, c) = 0$  definen una curva en el plano  $XY$  (siempre y cuando este conjunto no sea vacío). A esta curva se le llama una *curva de nivel* de la superficie. Geométricamente corresponden a el corte del plano  $z = c$  sobre la superficie  $S$ .

También nos interesa dibujar la curva como una curva en el espacio. Por abuso del lenguaje se dice “la curva de nivel  $z = c$ ” para indicar la curva de nivel “ $F(x, y, c) = 0$ ;  $z = 0$ ”. A las curvas “ $F(x, y, c) = 0$ ;  $z = c$ ” (si existen) les llamamos ‘trazas’ o ‘cortes’ de la superficie.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

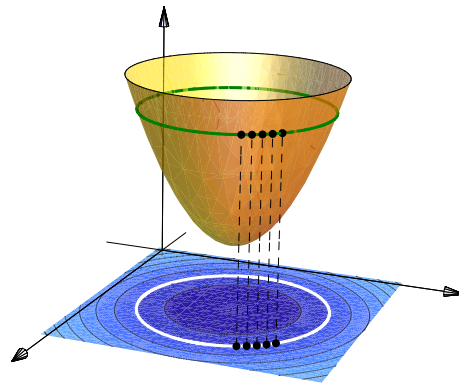


**Figura 2.12:** Trazas o corte  $z = c$  y curva de nivel.



**Figura 2.13:** Algunas curvas de nivel y algunas trazas.

Como se deduce fácilmente, si nos movemos sobre una curva de nivel  $z = c$ , la función se mantiene constante.



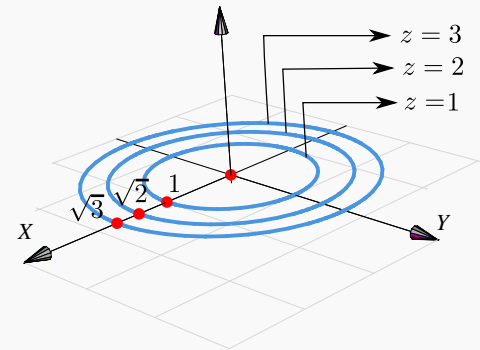
**Figura 2.14:** Sobre las curvas de nivel, la función es constante.

### Ejemplo 2.23

Consideremos la superficie de ecuación  $z = x^2 + y^2$ . Como  $z$  es una suma de cuadrados,  $z$  debe ser  $\geq 0$ . Vamos a dibujar las curvas de nivel correspondientes a  $z = 0, 1, 2$  y  $z = 3$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

- La curva de nivel  $z = 0$  es el punto  $(0, 0, 0)$
- La curva de nivel  $z = 1$ : circunferencia  $1 = x^2 + y^2$ ;  $z = 0$ .
- La curva de nivel  $z = 2$ : circunferencia  $2 = x^2 + y^2$ ;  $z = 0$ .
- La curva de nivel  $z = 3$ : circunferencia  $3 = x^2 + y^2$ ;  $z = 0$ .



### Ejemplo 2.24

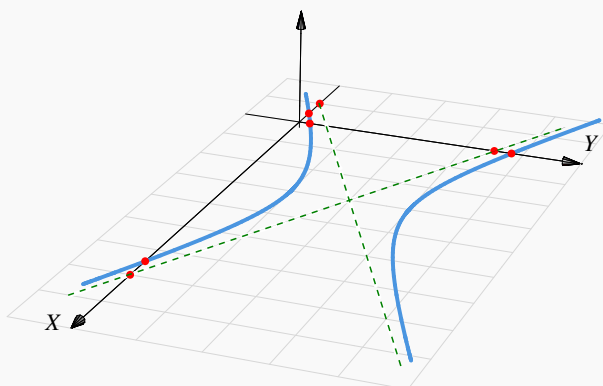
Consideremos la superficie de ecuación

$$z = (y - 2)^2 - \frac{(x - 3)^2}{4}.$$

Vamos a dibujar las curvas de nivel correspondientes a  $z = 0$  y  $z = 1$ .

- Si  $z = 0$  tenemos  $(y - 2)^2 = \frac{(x - 3)^2}{4}$ , es decir, un par de rectas:  $y = 2 \pm \frac{(x - 3)}{2}$ ;  $z = 0$ .
- La curva de nivel  $z = 1$  es la hipérbola  $1 = (y - 2)^2 - \frac{(x - 3)^2}{4}$ ;  $z = 0$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



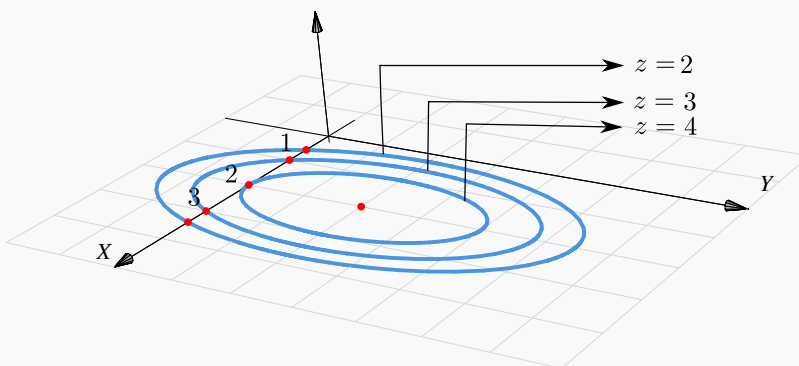
### Ejemplo 2.25

Consideremos la superficie de ecuación  $z - 1 = (x - 2)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4}$ . Dibujar las curvas de nivel correspondientes a  $z = 1, 2, 3$  y  $z = 4$ .

**Solución:**

- La curva de nivel  $z = 1$  es el punto  $(2, 2, 0)$ .
- La curva de nivel  $z = 2$  es la elipse  $1 = (x - 2)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4}$ .
- La curva de nivel  $z = 3$  es la elipse  $2 = (x - 2)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4}$ , es decir,  $1 = \frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{(y - 2)^2}{8}$ .
- La curva de nivel  $z = 4$  es la elipse  $3 = (x - 2)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4}$ , es decir,  $1 = \frac{(x - 2)^2}{3} + \frac{(y - 2)^2}{12}$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Trazas o cortes.** Con el fin de realizar el dibujo de una superficie  $S$  de ecuación explícita  $z = f(x, y)$  o de ecuación implícita  $F(x, y, z) = 0$ , procedemos a realizar cortes a esta superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Estas curvas son llamadas *trazas o cortes* y producen un dibujo ‘de alambre’ de la superficie a dibujar.

Para describir las trazas por ecuaciones se procede de la siguiente manera:

- Si la traza resulta de la intersección de la superficie  $S$  con el plano  $x = c$ , entonces su ecuación es “ $z = f(c, y)$ ;  $x = c$ ” o “ $F(c, y, z) = 0$ ;  $x = c$ ,” y se representa en el plano  $x = c$ .
- Si la traza resulta de la intersección de la superficie  $S$  con el plano  $y = c$ , entonces su ecuación es “ $z = f(x, c)$ ;  $y = c$ ” o “ $F(x, c, z) = 0$ ;  $y = c$ ,” y se representa en el plano  $y = c$ .
- Si la traza resulta de la intersección de la superficie  $S$  con el plano  $z = c$ , entonces su ecuación es “ $c = f(x, y)$ ,  $z = c$ ” o “ $F(x, y, c) = 0$ ,  $z = c$ ” y se representa en el plano  $z = c$ .

### Ejemplo 2.26

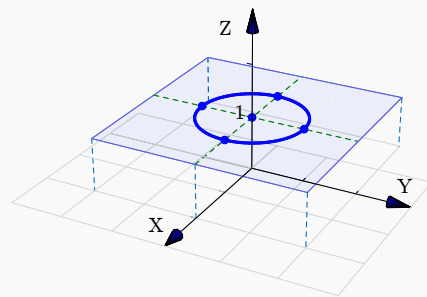
Consideremos la superficie de ecuación  $z = x^2 + y^2$ . Dibujar la traza  $z = 1$ .

**Solución:** La traza  $z = 1$  es la circunferencia

$$1 = x^2 + y^2; \text{ con } z = 1.$$

La curva se representa en el plano  $z = 1$ . Como la circunferencia vive en el plano  $z = 1$ , para dibujarla ubicamos su centro  $(0, 0, 1)$  y trazamos un par de rectas paralelas a los ejes  $X$  e  $Y$  que pasen por este punto, estas líneas las podemos usar como “semiejes” para dibujar este tipo de elipse.

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Estrategia general: Trasladar los ejes.** Para dibujar trazas una estrategia consiste en trasladar los ejes al plano de dibujo:  $x = c$ ;  $y = c$  o  $z = c$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

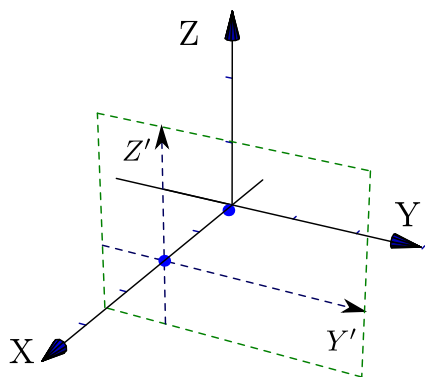


Figura 2.15: Traslación de ejes

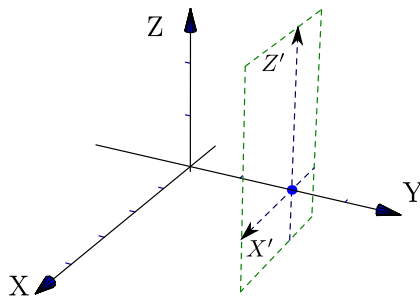


Figura 2.16: Traslación de ejes

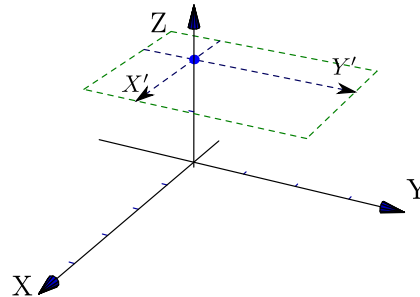


Figura 2.17: Traslación de ejes

**Ejemplo 2.27**

Consideremos la superficie  $S$  de ecuación  $4(y-1)^2 + 4(z-1)^2 = x^2$ . Dibujar la traza  $x = 2$ .

**Solución:**

La traza  $x = 2$  es la curva

$$(y-1)^2 + (z-1)^2 = 1; x = 2.$$

Para dibujar la traza primero trasladamos los ejes al plano  $x = 2$  (figura 2.18), luego dibujamos la curva en el plano  $YZ$  (figura 2.19).

Finalmente dibujamos la curva “ $(y-1)^2 + (z-1)^2 = 1; x = 2$ ” usando los ejes  $Y'Z'$  (figura 2.20).

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

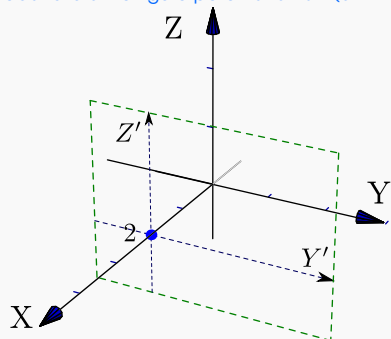


Figura 2.18: Traslación de ejes

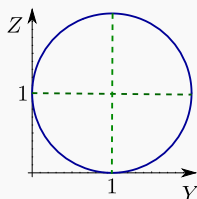
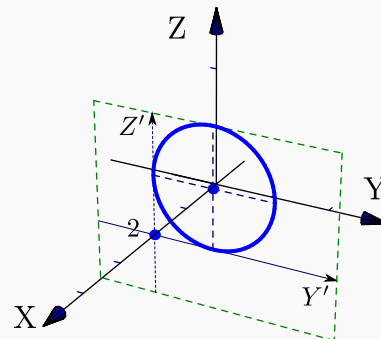


Figura 2.19

Figura 2.20: Traza  $x = 2$



**Ejemplo 2.28**

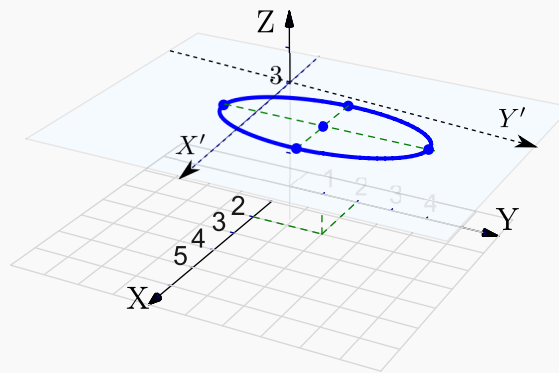
Consideremos la superficie de ecuación  $z - 1 = (x - 2)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4}$ . Dibujar la traza  $z = 3$ .

**Solución:** La traza  $z = 3$  es la elipse

$$\frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{(y - 2)^2}{8} = 1 \text{ en el plano } z = 3.$$

Como la elipse vive en el plano  $z = 3$ , para dibujarla ubicamos su centro  $(2, 2, 3)$  y trazamos un par de semiejes  $X'$  y  $Y'$  paralelos a los ejes  $X$  e  $Y$  que pasen por este punto, estas líneas las podemos usar para dibujar la elipse de la manera usual.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Cuádricas**

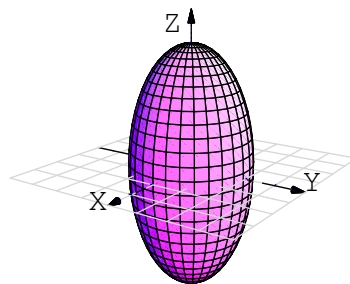
Nos interesan las cuádricas de ecuación  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ . Excepto casos degenerados, completando cuadrados podemos obtener la ecuación canónica de cada superficie cuadrática. A continuación se muestra algunas cuádricas en posición estándar y centradas en el origen.

**Cuádricas centradas en el origen**

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

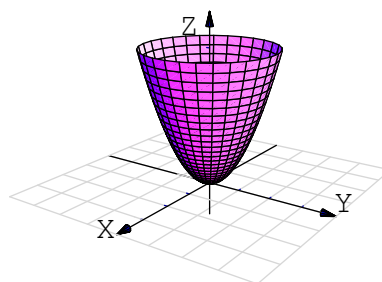
**Elipsoide:** Tiene ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Es simétrico con respecto a cada uno de los tres planos coordenados y tiene intersección con los ejes coordenados en  $(\pm a, 0, 0)$ ,  $(0, \pm b, 0)$  y  $(0, 0, \pm c)$ . La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es un único punto o una elipse.



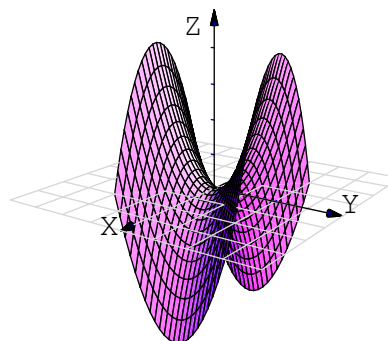
**Paraboloides elíptico:** Tiene ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

Sus trazas sobre planos horizontales  $z = k$  son elipses:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$ . Sus trazas sobre planos verticales, ya sean  $x = k$  o  $y = k$  son parábolas.



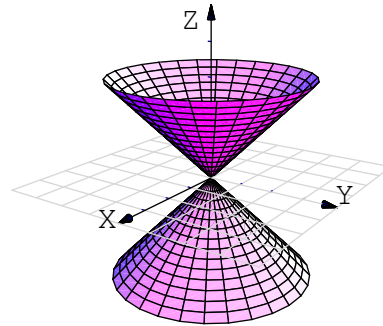
**Paraboloides hiperbólico:** Tiene ecuación  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ .

Sus trazas sobre planos horizontales  $z = k$  son hipérbolas o dos rectas ( $z = 0$ ). Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano  $x$  son parábolas que abren hacia abajo, mientras que las trazas sobre planos verticales paralelos al plano  $YZ$  son parábolas que abren hacia arriba. Su gráfica tiene la forma de una silla de montar.



**Cono elíptico:** Tiene ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ .

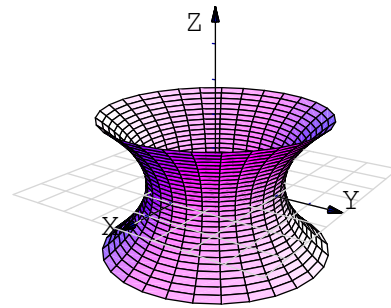
Sus trazas sobre planos horizontales  $z = k$  son elipses.  
Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas.



**Hiperboloide de una hoja:** Tiene ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

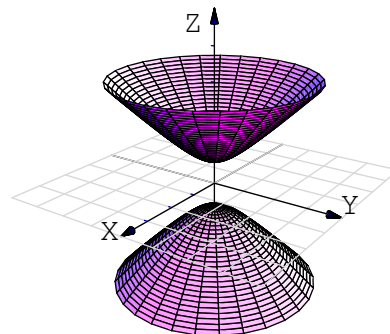
Sus trazas sobre planos horizontales  $z = k$  son elipses  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$ . Sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas o un par de rectas que se intersecan.



**Hiperboloide de dos hojas:** Tiene ecuación

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Es una superficie con dos *hojas* (o mantos) separadas. Sus trazas sobre planos horizontales  $z = k$  son elipses y sobre planos verticales son hipérbolas.



**Ejemplo 2.29**

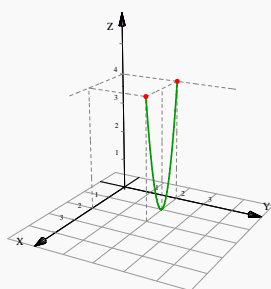
Considere la superficie  $S : (y - 2)^2 + 4(x - 1)^2 = z$ . Dibuje por separado las trazas obtenidas al intersecar  $S$  con los planos de ecuación  $y = 2$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$  y  $z = 4$ , y dibuje la superficie.

**Solución:** Se trata de un parabolide elíptico.

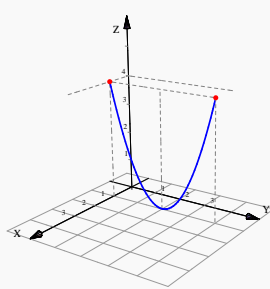
- La traza  $y = 2$  corresponde a la parábola  $4(x - 1)^2 = z$ ,  $y = 2$ .
- La traza  $x = 1$  corresponde a la parábola  $(y - 2)^2 = z$ ,  $x = 1$ .
- La traza  $z = 4$  corresponde a la elipse  $(y - 2)^2 + 4(x - 1)^2 = 4$ ,  $z = 4$ .
- La traza  $z = 0$  corresponde al vértice del parabolide,  $(4, 2, 0)$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

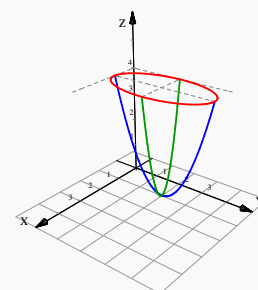
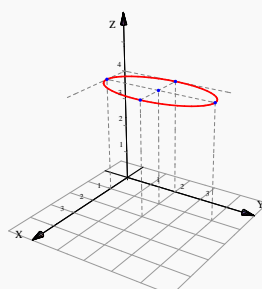
Traza  $y = 2$



Traza  $x = 1$



Traza  $z = 4$

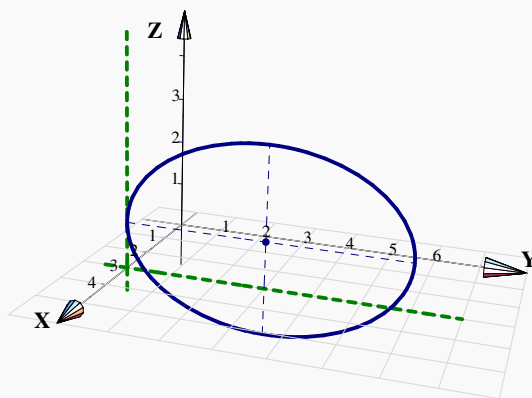
**Ejemplo 2.30**

Identifique y dibuje la superficie cuadrática  $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$ .

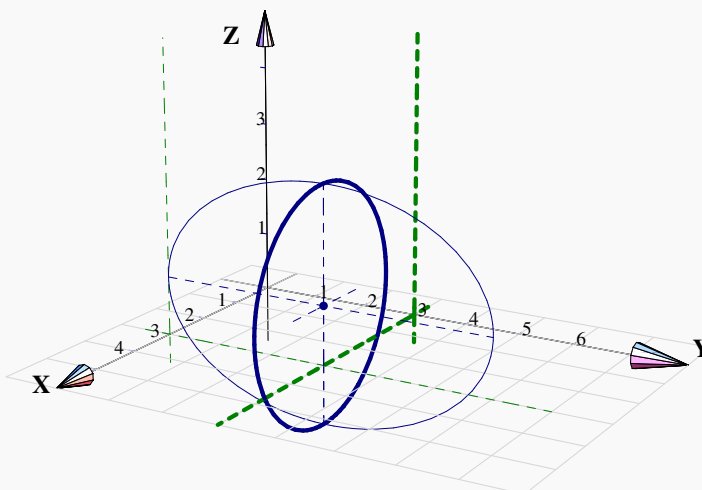
**Solución:** Se trata de un elipsoide con centro en  $(3, 3, 1)$ . Una estrategia de dibujo es la siguiente: Los elipsoides se puede dibujar con tres elipses (trazas). En este caso, se pueden usar  $x = 3$ ;  $y = 3$  y  $z = 1$  (estos valores corresponden al centro de la cuádrica).

- La traza  $x = 3$  corresponde a la elipse  $\frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$ ,  $x = 3$ ; que se dibuja en el plano  $x = 3$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

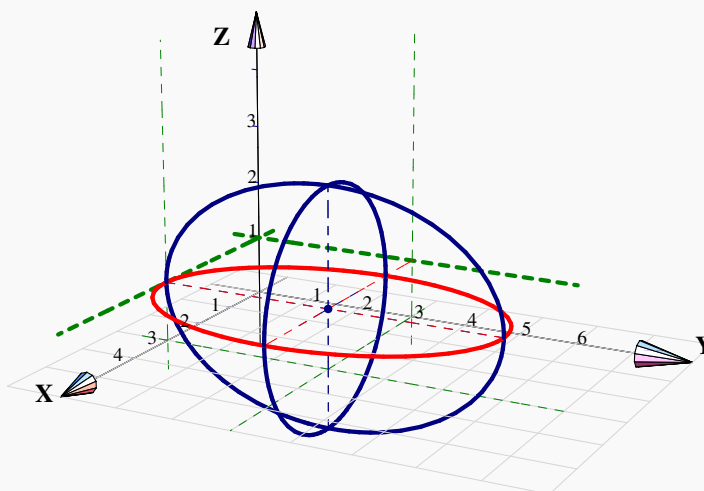


- Si  $y = 3$  obtenemos la elipse (circunferencia)  $(x - 3)^2 + (z - 1)^2 = 4$ ,  $y = 3$ ; que se dibuja en el plano  $y = 3$ .

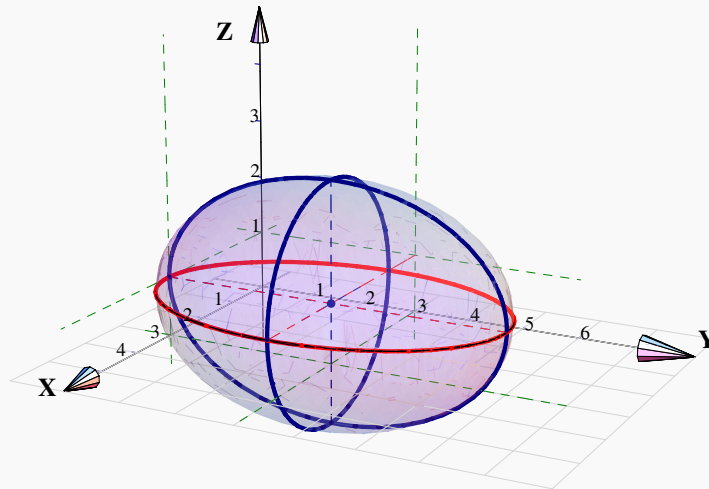


- Si  $z = 1$  obtenemos la elipse  $\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$ ,  $z = 1$ ; que se dibuja en el plano  $z = 1$ .

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



Este es el elipsoide,



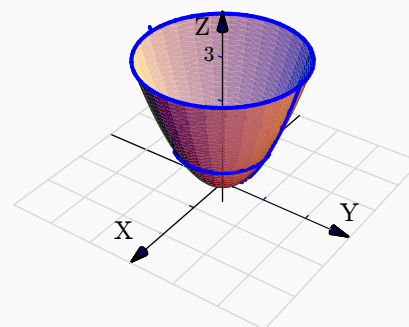
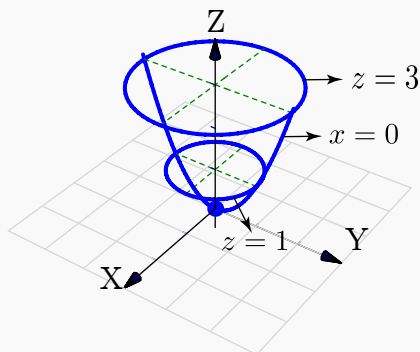
### Ejemplo 2.31

Consideremos la superficie de ecuación  $z = x^2 + y^2$ . Trazar la superficie usando las trazas correspondientes a  $z = 0, 1, 3$  y  $x = 0$ .

**Solución:**

- La traza  $z = 0$  es el punto  $(0,0,0)$
- La traza  $z = 1$  es la circunferencia  $1 = x^2 + y^2$ ; en el plano  $z = 1$
- La traza  $z = 3$  es la circunferencia  $3 = x^2 + y^2$ ; en el plano  $z = 3$
- La traza  $x = 0$  es la parábola  $z = y^2$ ; en el plano  $x = 0$

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

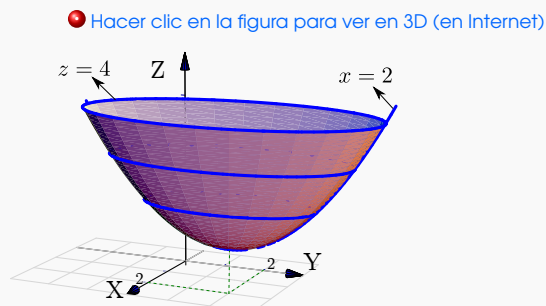
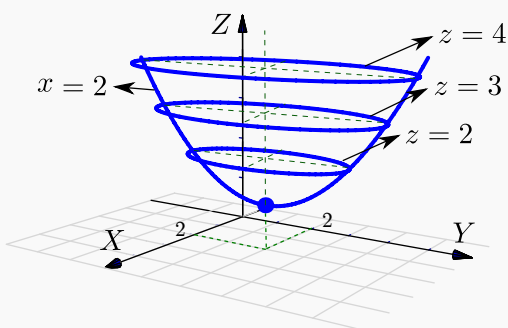


**Ejemplo 2.32**

Consideremos la superficie de ecuación  $z - 1 = (x - 2)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4}$ . Trazar la superficie usando las trazas correspondientes a  $z = 1, 2, 3, 4$  y  $x = 2$ .

**Solución:**

- La traza  $z = 1$  es el punto  $(2, 2, 1)$
- La traza  $z = 2$  es la elipse  $1 = (x - 2)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4}$  en el plano  $z = 2$ .
- La traza  $z = 3$  es la elipse  $1 = \frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{(y - 2)^2}{8}$  en el plano  $z = 3$ .
- La traza  $z = 4$  es la elipse  $1 = \frac{(x - 2)^2}{3} + \frac{(y - 2)^2}{12}$  en el plano  $z = 4$ .
- La traza  $x = 2$  es la parábola  $z - 1 = \frac{(y - 2)^2}{4}$  en el plano  $x = 2$ .

**Ejemplo 2.33**

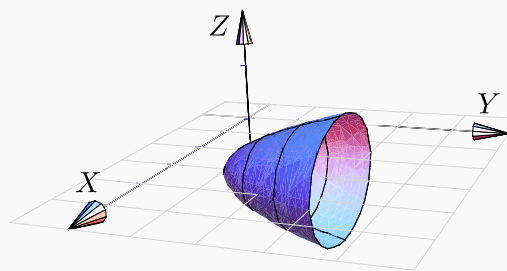
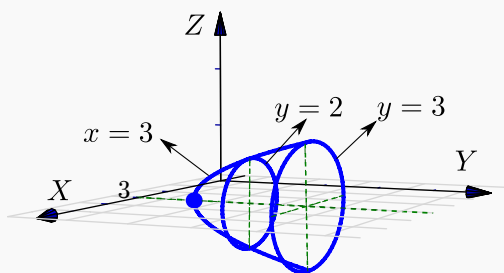
Identifique y dibuje la superficie cuadrática  $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

**Solución:** Completando el cuadrado en  $x$  obtenemos el *paraboloide elíptico*  $y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$ . Abre en dirección del la parte positiva del eje  $Y$ .

**Trazas.** La estrategia es la siguiente: El *paraboloide elíptico* (que está más arriba), se puede dibujar con un par de elipses y una parábola. Para obtener las elipses le damos valores a  $y$  en la ecuación  $y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$ . Se requiere que  $y \geq 1$ .

- Si  $y = 1$  obtenemos el punto:  $(3, 1, 0)$ .

- Si  $y = 2$  obtenemos la elipse  $1 = (x-3)^2 + \frac{z^2}{1/2}$  en el plano  $y = 2$
  - Si  $y = 3$  obtenemos la elipse  $1 = \frac{(x-3)^2}{2} + z^2$  en el plano  $y = 3$
  - Para obtener la parábola, ponemos  $x = 3$  y obtenemos la parábola  $y = 2z^2 + 1$  en el plano  $x = 3$ .
- [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



### Ejemplo 2.34

Identifique y dibuje la superficie cuadrática  $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$ .

**Solución:** Dividiendo por 4 obtenemos:  $-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$ , que corresponde a un *hiperboloide de dos hojas*. Abre en dirección del eje  $Y$ .

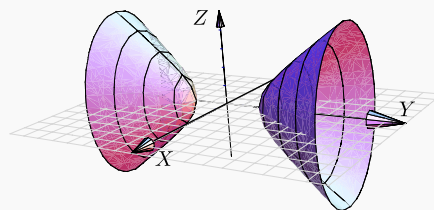
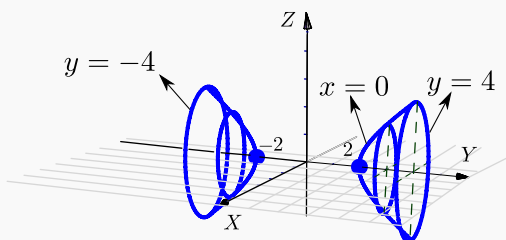
**Trazas.** La estrategia es la siguiente: El *hiperboloide de dos hojas* (que está más arriba), se puede dibujar con dos elipses y una hipérbola *por cada hoja*.

Para obtener elipses, arreglamos la ecuación como  $\frac{y^2}{4} - 1 = x^2 + \frac{z^2}{2}$ . Las elipses se obtienen dando valores a  $y$  con  $|y| > 2$ .

- Si  $y = \pm 2$  obtenemos dos puntos:  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, -2, 0)$ .
- Si  $y = \pm 3$  obtenemos la elipse  $\frac{x^2}{5/4} + \frac{z^2}{5/2} = 1$  en el plano  $y = 3$  y el plano  $y = -3$ .
- Si  $y = \pm 4$  obtenemos la elipse  $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{6} = 1$  en el plano  $y = 4$  y el plano  $y = -4$ .
- Para obtener la hipérbola, ponemos  $x = 0$  y arreglamos la ecuación como  $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$ .



[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



## 7 Ejercicios

**2.7** Dibuje cada una de las siguientes cuádricas:

- a.)  $x^2 + (y - 2)^2 = z/4$
- b.)  $z^2 + y^2 = x/4$
- c.)  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2/9 = 1$
- d.)  $x^2 + y^2 - (z - 2)^2 = 1$
- e.)  $x^2 + y^2 - (z - 2)^2 = 0$
- f.)  $x^2 + (y - 2)^2 - z^2 = 0$

**2.8** Considere la superficie de ecuación  $S: 4 - z = x^2 + (y - 2)^2 + z$ . Dibuje por separado las curvas de corte de  $S$  con los planos  $x = 0$ ,  $z = 3$  y  $z = 0$ . Y luego dibuje  $S$ .

## 2.5 Sólidos simples

Los sólidos simples se describen por medio de su frontera, es decir, se describen por las superficies que lo limitan. Un sólido simple es un conjunto compacto limitado por una o varias superficies orientables (de dos caras), sin hoyos, con borde y sin traslapes; en el interior del sólido no hay superficies ni 'burbujas' (la frontera del sólido es tal que divide el espacio en dos partes).

### Visualizando curvas de intersección entre superficies

Para realizar dibujos 'a mano' es esencial visualizar las curvas de intersección entre superficies. En general, si dos superficies se cortan en una o varias curvas, una manera de bosquejar estas curvas es buscar algunos puntos de contacto. En los casos más sencillos, estos puntos los podemos localizar en los planos  $XY$ ,  $XZ$  o  $YZ$ . En los ejemplos que siguen, estos "puntos-guía" se señalan con un punto rojo.

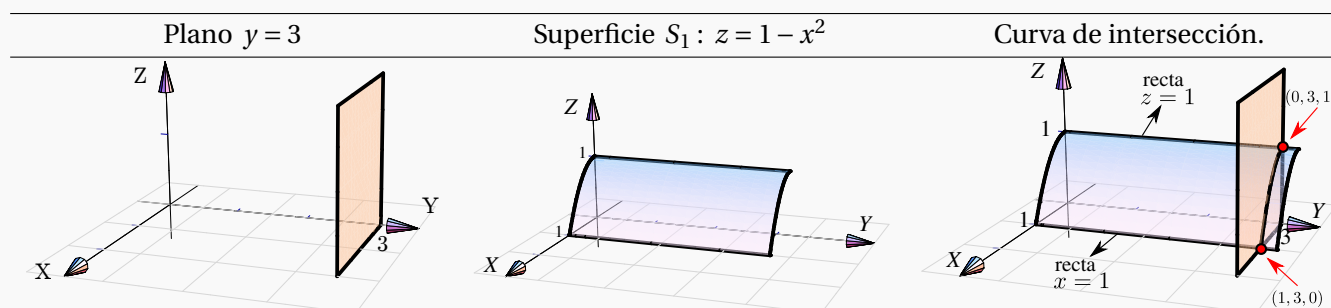
**Ejemplo 2.35**

Consideremos la curva  $C$  de intersección de la superficie  $S_1 : z = 1 - x^2$  y el plano  $S_2 : y = 3$ , en el primer octante.

Para dibujar esta curva, calculamos “dos puntos guía” para trazar la curva. Los puntos guía están en rojo en la figura. Son el punto de intersección entre las rectas  $z = 1$  y  $y = 3$  en el plano  $YZ$  y el punto de intersección entre las rectas  $z = 1$  y  $y = 3$  en el plano  $XY$ . La curva que queremos dibujar inicia en uno de estos puntos y termina en el otro.

Para obtener una parametrización de esta curva  $C$ , podemos tomar a  $x = t$  como parámetro,  $C : r(t) = (t, 3, 1 - t^2)$  con  $t \in [0, 1]$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Ejemplo 2.36**

Consideremos la curva  $C$  de intersección entre la superficie  $S_1 : z = 4 - \frac{x^2}{4}$  y el plano  $S_2 : x + y = 6$  en el primer octante.

El plano  $S_2 : x + y = 6$  interseca a los ejes  $X$  e  $Y$  en  $x = 6$  y  $y = 6$ , respectivamente. Como se observa, los puntos-guía están en los planos  $XY$  y  $YZ$ .

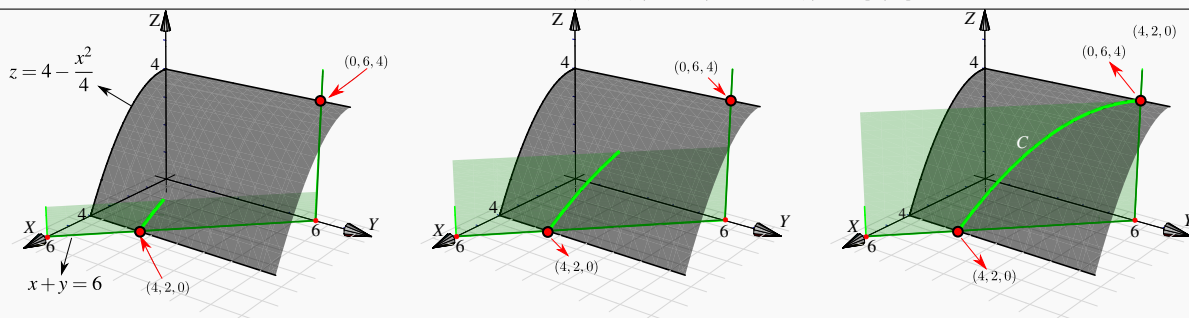
En el plano  $XY$  el punto-guía se obtiene sustituyendo  $x = 4$  en la ecuación de la recta  $x + y = 6$ ,  $z = 0$ ; se obtiene  $(4, 2, 0)$ .

En el plano  $YZ$  el punto-guía es claramente  $(0, 6, 4)$ .

Usando  $x = t$ , una parametrización de la curva  $C$  es  $r(t) = (t, 6 - t, 4 - t^2/4)$ ;  $t \in [0, 6]$ .

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Curva de intersección  $C: r(t) = (t, 6-t, 4-t^2/4); t \in [0, 6]$ .



### Ejemplo 2.37

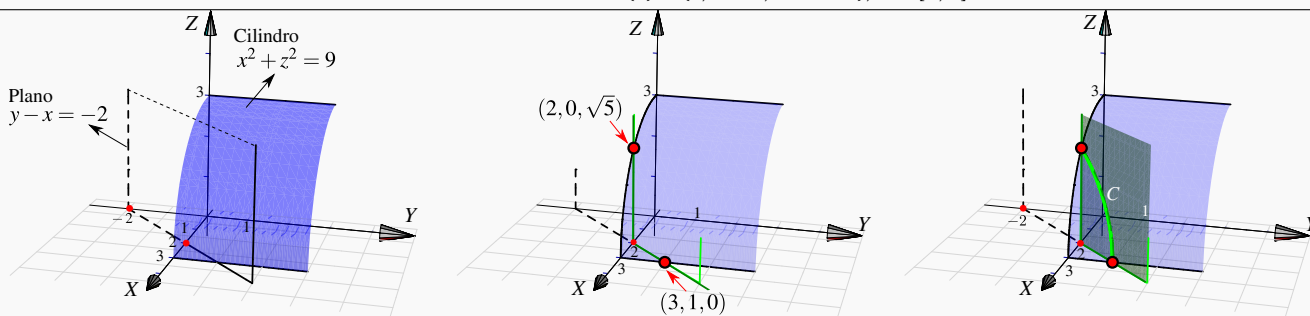
Consideremos la curva de intersección entre la superficie  $S_1: x^2 + z^2 = 9$  y el plano  $S_2: y - x = -2$  *en el primer octante*.

El corte del plano  $S_2: y - x = -2$  con el plano  $XZ$  es la recta  $x = 2$  (pues sobre este plano,  $y = 0$ ). Sustituyendo  $x = 2$  en la ecuación  $x^2 + z^2 = 9$ ,  $y = 0$ ; obtenemos el punto de intersección  $(2, 0, \sqrt{5})$ .

El otro punto-guía se obtiene sustituyendo  $x = 3$  en la ecuación del plano  $S_2: y - x = -2$ , este punto es  $(3, 1, 0)$ . Para una parametrización podemos usar  $x = t$  como parámetro.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Curva de intersección  $C: r(t) = (t, t-2, \sqrt{9-t^2}); t \in [2, 3]$ .

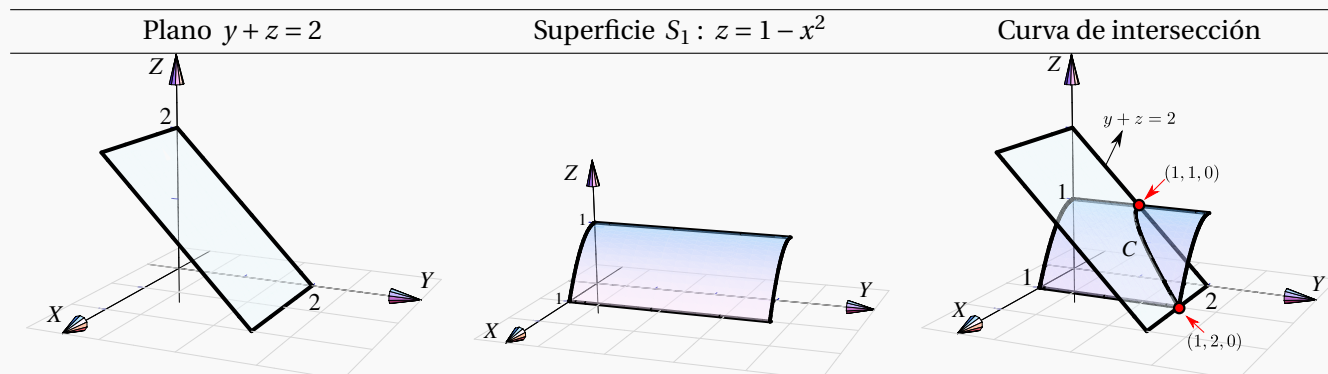


### Ejemplo 2.38

Consideremos la superficie  $S_1: z = 1 - x^2$  y el plano  $S_2: y + z = 2$  *en el primer octante*. Los puntos-guía son  $(1, 2, 0)$  y  $(0, 1, 1)$ . El punto  $(0, 1, 1)$  se obtiene sustituyendo  $z = 1$  en la ecuación de la recta  $y + z = 2, x = 0$ .

Para una parametrización, podemos tomar  $x = t$  como parámetro,  $C: r(t) = (t, 2 - (1 - t^2), 1 - t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

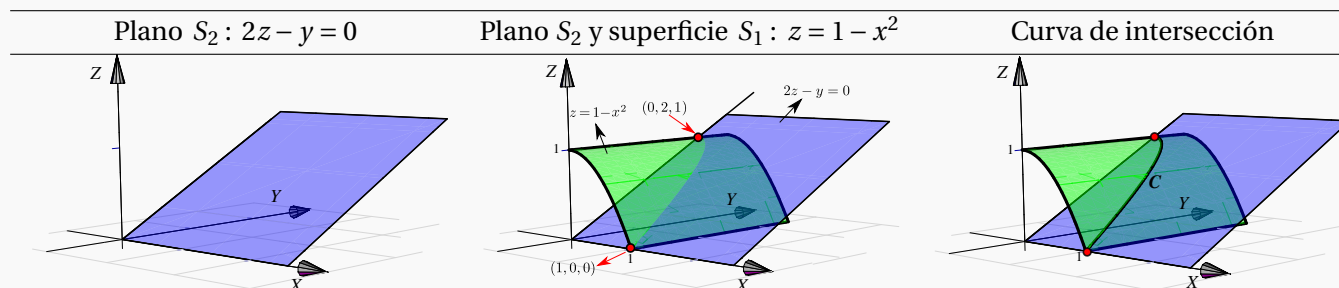


### Ejemplo 2.39

Consideremos la superficie  $S_1: z = 1 - x^2$  y el plano  $S_2: 2z - y = 0$ , *en el primer octante*. Para dibujar la curva  $C$  de intersección en el primer octante, buscamos los puntos guía. En este caso estos puntos son  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 2, 1)$ .

Para obtener una parametrización de la curva  $C$ , podemos usar  $x = t$  como parámetro;  $C: r(t) = (t, 2(1 - t^2), 1 - t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



### Ejemplo 2.40

Consideremos las superficies  $S_1: x^2 + y^2 = 1$ ,  $S_2: x - z^2 = 0$ , *en el primer octante*. Para dibujar la curva  $C$  de intersección en el primer octante, buscamos los puntos guía. En este caso estos puntos son  $(1, 1, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .

Para obtener una parametrización de la curva  $C$ , podemos parametrizar desde el plano  $XY$ . La circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  se parametriza con  $x = \cos t$  y  $y = \sin t$ . La coordenada  $z$  es  $z = \sqrt{x} = \sqrt{\cos t}$ . Así,

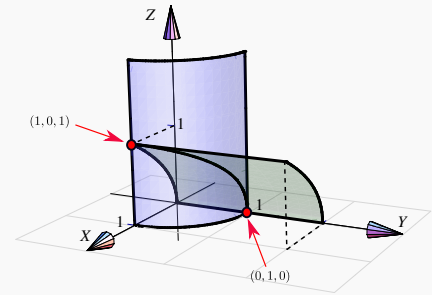
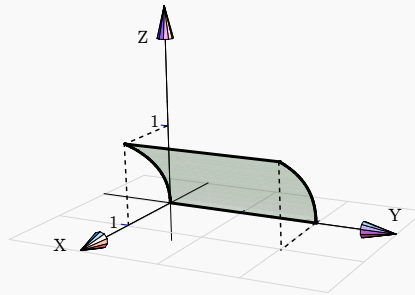
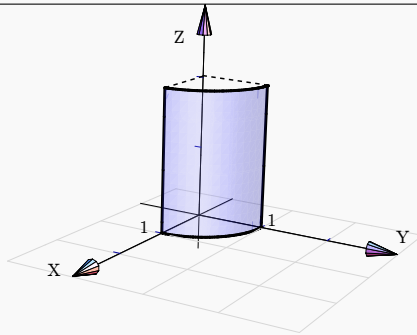
$$C : r(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{\cos t}), \quad t \in [0, \pi/2].$$

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Superficie  $S_1 : x^2 + y^2 = 1$

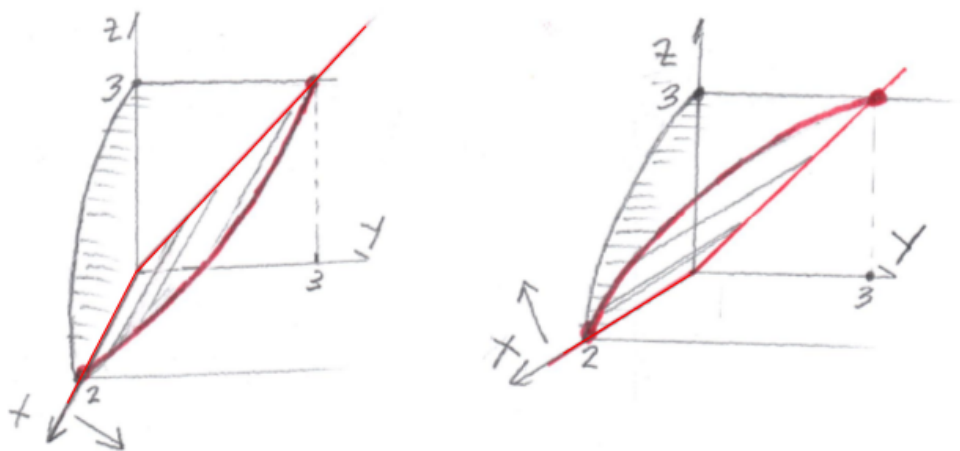
Superficie  $S_2 : x - z^2 = 0$

Curva de intersección



**Perspectiva.** En general, cuando dibujamos el sistema de ejes  $XYZ$  en posición estándar, podemos mover el eje  $X$  un poco hacia arriba o un poco hacia abajo y esto hace que la perspectiva cambie.

En el dibujo que sigue, se muestra la intersección del mismo cilindro y el mismo plano, la diferencia está en la posición del eje  $X$  (lo que produce el cambio de perspectiva!). En el primer caso el plano se ve “desde arriba” en el segundo caso el plano lo vemos “desde abajo”

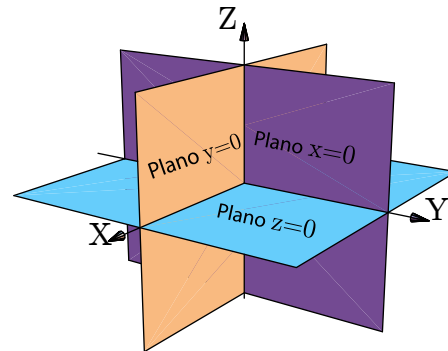


**Figura 2.21:** Efecto en la perspectiva al mover el eje  $X$

## Dibujo de sólidos simples

**Los planos  $x=0$ ;  $y=0$  y  $z=0$ .** Muchos de los sólidos están limitados por uno o varios de los planos coordenados, es decir, los planos  $x=0$ ;  $y=0$  y  $z=0$ . Por lo tanto vale la pena recordar estos planos.

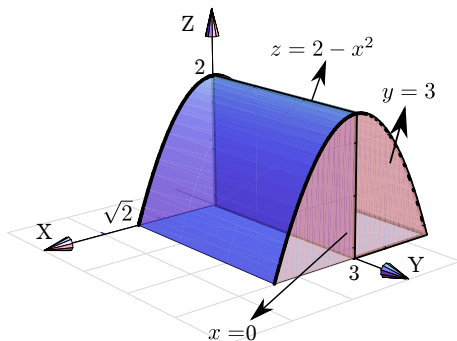
**¿Siempre dibujamos en el I octante?** No, excepto que se pida de manera específica. A veces se pide el dibujo en el primer octante para simplificar el dibujo, pero para otros sólidos es obligatorio especificar el octante para que se cumpla la especificación de *sólido simple* que dimos más arriba y así evitar ambigüedades (recuerde que los sólidos simples son conjuntos compactos y no tienen superficies interiores ni ‘burbujas’).



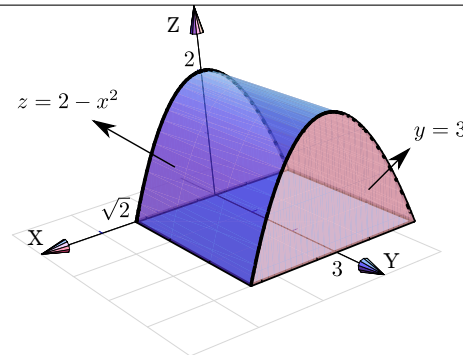
**Ambigüedades.** Por ejemplo, el sólido  $Q$  limitado por  $z = 2 - x^2$ ;  $y = 3$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ , no es un sólido simple pues  $x = 0$  es una superficie interior. Si eliminamos esta superficie interior, si tendríamos un sólido simple.

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Sólido  $Q$  (**no simple**) limitado por  $z = 2 - x^2$ ;  $y = 3$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ .



Sólido  $Q$  **simple**, limitado por  $z = 2 - x^2$ ;  $y = 3$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ ,

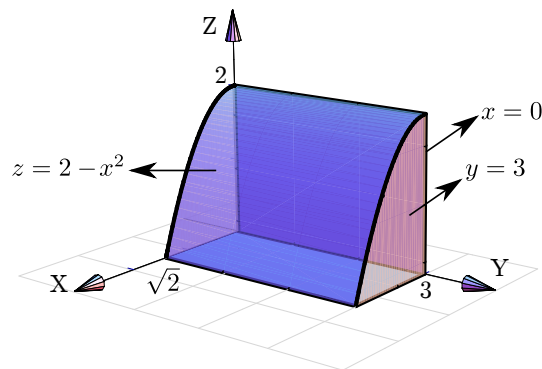


Los siguientes sólidos son una “variación” del sólido anterior, pero ahora se trata de sólidos simples. En particular muestran que la presencia de los planos “ $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ” no implica que el sólido esté en el primer octante, de hecho se pueden usar estos planos especificando que el sólido está en otro octante:

---

$Q$  limitado por  $z = 2 - x^2$ ;  $y = 3$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ , en el primer octante

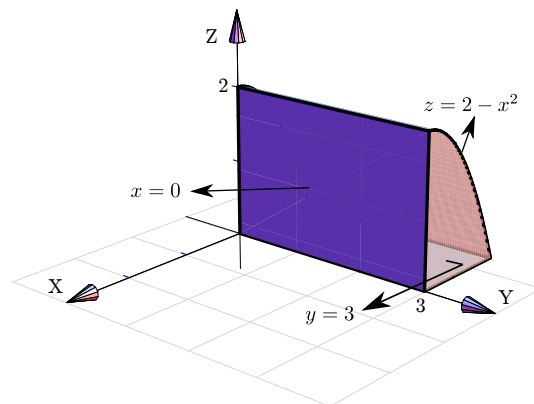
---




---

$Q$  limitado por  $z = 2 - x^2$ ;  $y = 3$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ , en el segundo octante

---



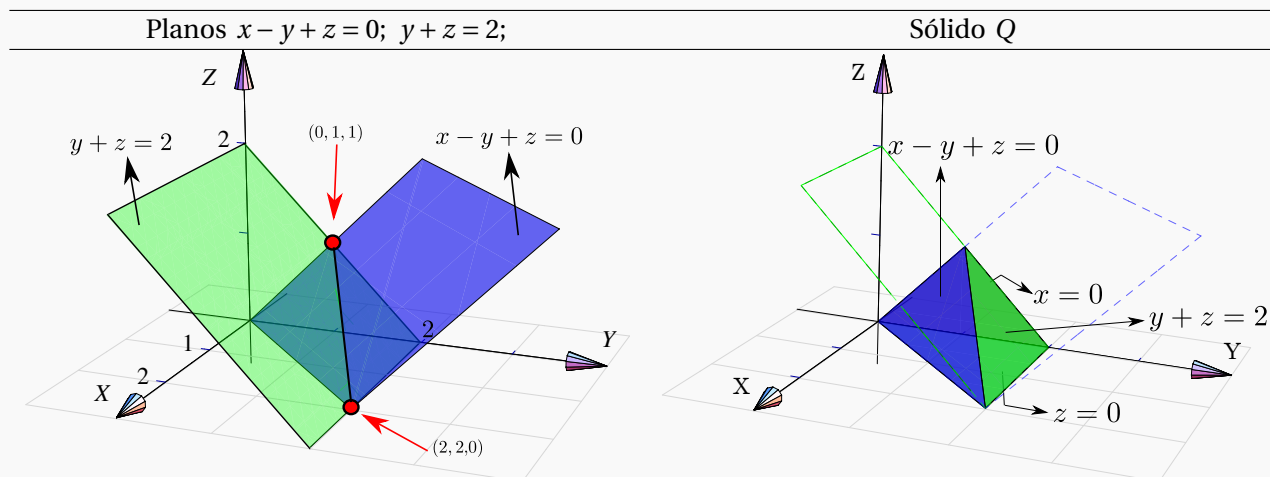
El dibujo de sólidos simples se hace estableciendo las rectas o las curvas de intersección entre las superficies que limitan el sólido.

### Ejemplo 2.41

Dibujar el sólido  $Q$  limitado por los planos  $x - y + z = 0$ ;  $y + z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ .

**Solución:** Dibujamos ambos planos y marcamos los puntos guía para trazar el segmento de intersección. Uno de los puntos se obtiene como la intersección de las rectas  $-y + z = 0$  y  $y + z = 2$ , y el otro como la intersección de las rectas  $x - y = 0$  y  $y = 2$ . Estos puntos son  $(0, 1, 1)$  y  $(2, 2, 0)$ . El sólido se mantiene en el primer octante pues está limitado por el plano  $x = 0$  (plano  $YZ$ ) y el plano  $z = 0$  (plano  $XY$ ).

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

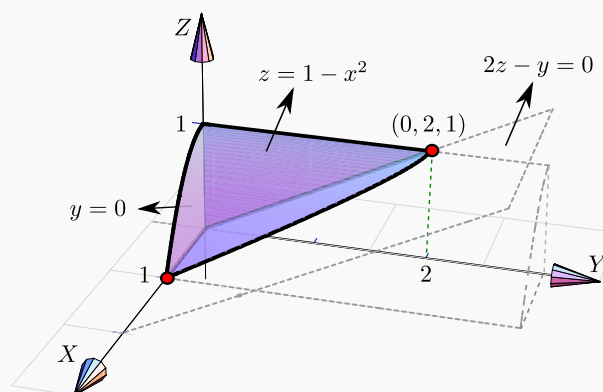


### Ejemplo 2.42

Dibujar el sólido  $Q$  limitado por la superficie  $S_1 : z = 1 - x^2$  y los planos  $2z - y = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$ ; en el primer octante.

**Solución:** La superficie  $S_1 : z = 1 - x^2$  queda arriba y el plano  $2z - y = 0$  queda abajo. El plano  $z = 0$  *no* es parte del sólido. El punto  $(0, 2, 1)$  se obtiene como intersección de las rectas  $z = 1$  y  $2z - y = 0$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



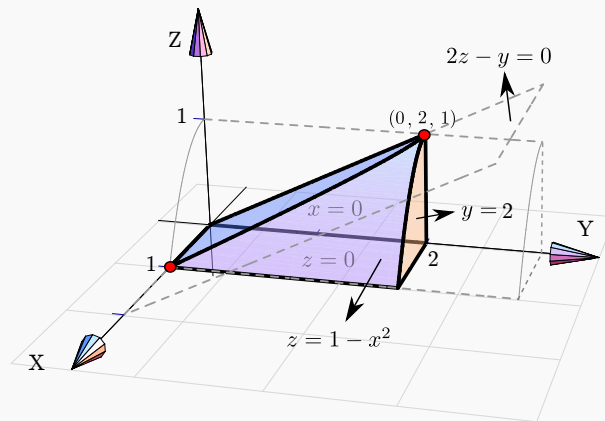
### Ejemplo 2.43

Dibujar el sólido  $Q$  limitado por la superficie  $S_1 : z = 1 - x^2$  y los planos  $2z - y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $z = 0$  y  $y = 2$ , en el primer octante.

**Solución:** Como el sólido está limitado por los planos  $z = 0$  y  $x = 0$ , entonces el plano  $2z - y = 0$  queda en la parte de arriba del sólido.

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



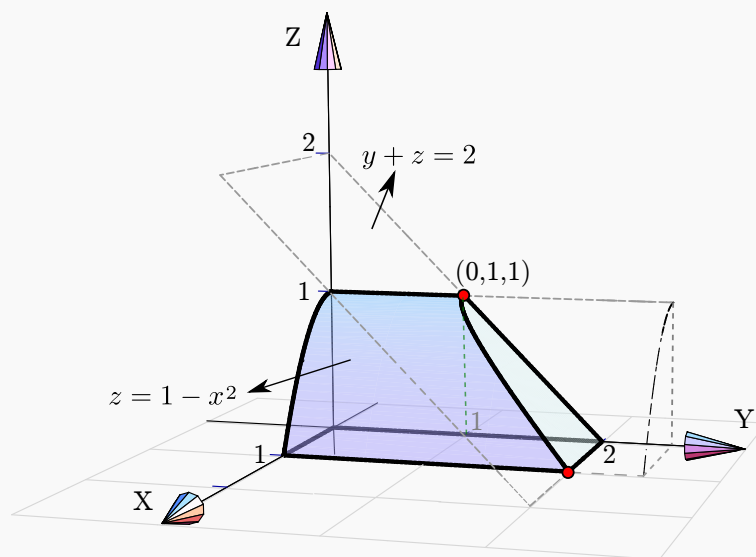


### Ejemplo 2.44

Dibujar el sólido  $Q$  limitado por la superficie  $S_1 : z = 1 - x^2$  y el plano  $y + z = 2$ ; en el primer octante.

**Solución:** En este caso no es necesario especificar los planos  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ ; con solo especificar que está en el primer octante es suficiente porque en este caso no hay ambigüedad.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

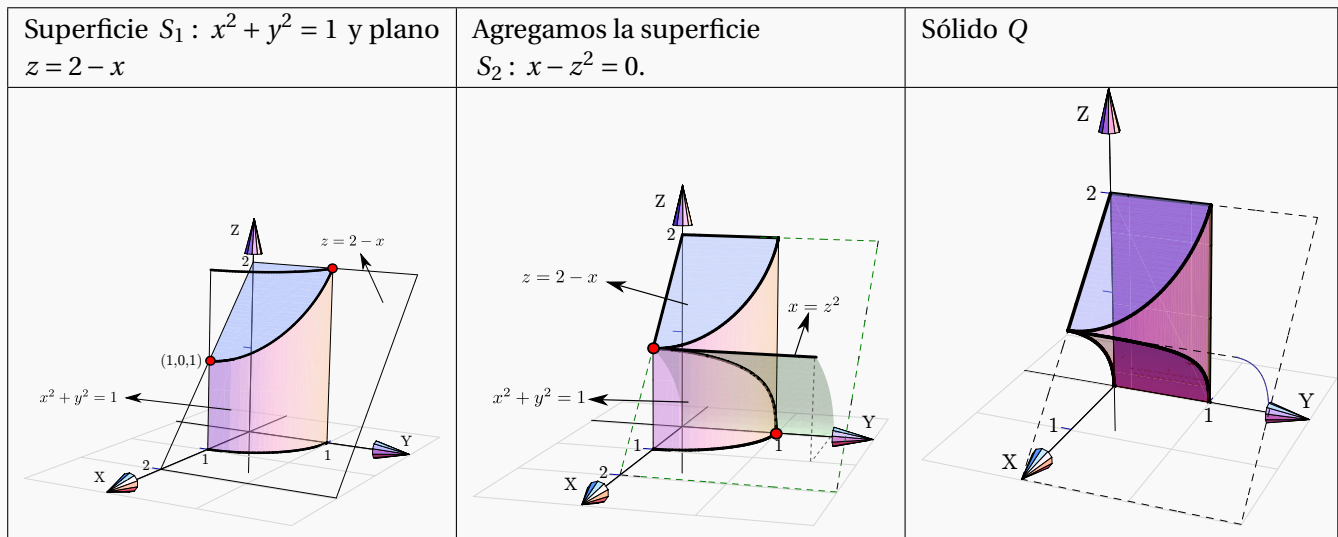


**Ejemplo 2.45**

Dibujar el sólido  $Q$  limitado por las superficies  $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ ;  $S_2 : x - z^2 = 0$  y los planos  $z = 2 - x$ ;  $x = 0$  y  $y = 0$ , en el primer octante.

**Solución:** Tal vez sea más sencillo dibujar primero la superficie  $S_1 : x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $z = 2 - x$ ; luego dibujamos la otra superficie  $S_2 : x - z^2 = 0$ .

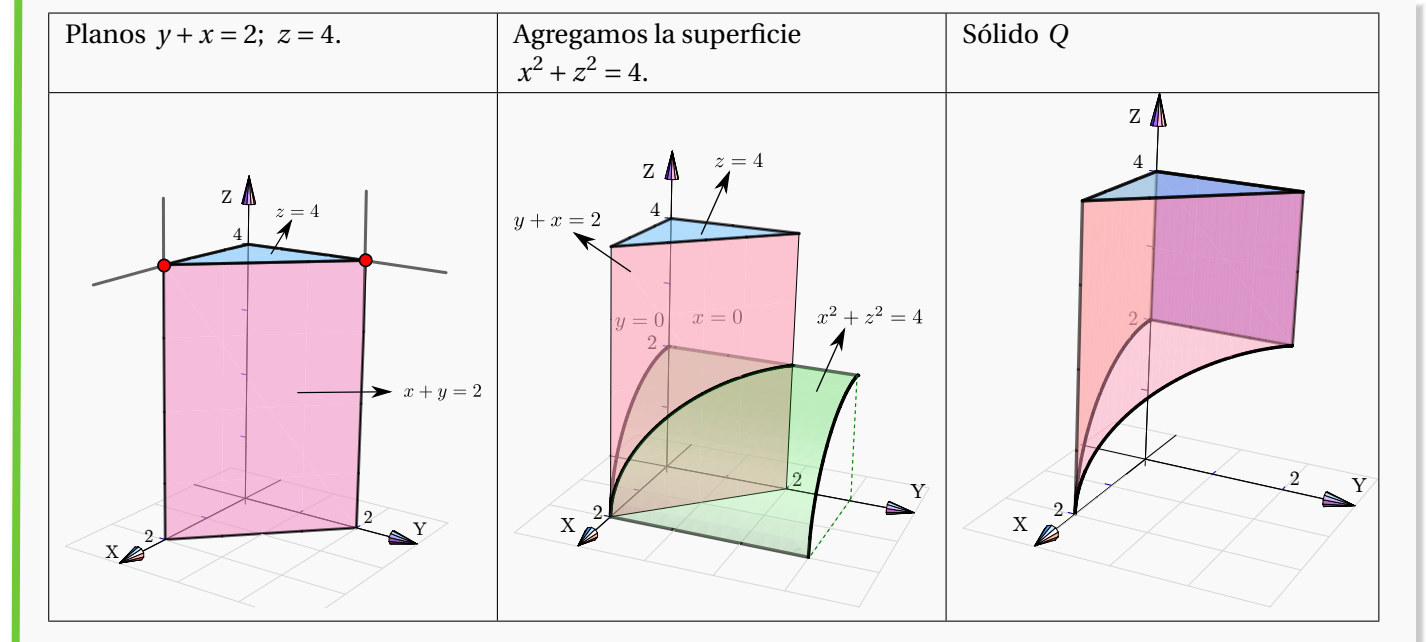
• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Ejemplo 2.46**

Dibuje el sólido  $Q$  limitado por las superficies  $x^2 + z^2 = 4$ ;  $y + x = 2$ ;  $z = 4$ ; y  $y = 0$ ,  $x = 0$ , en el I octante.

**Solución:** Dibujamos los planos  $y + x = 2$  y  $z = 4$ ; luego agregamos la otra superficie  $x^2 + z^2 = 4$ .

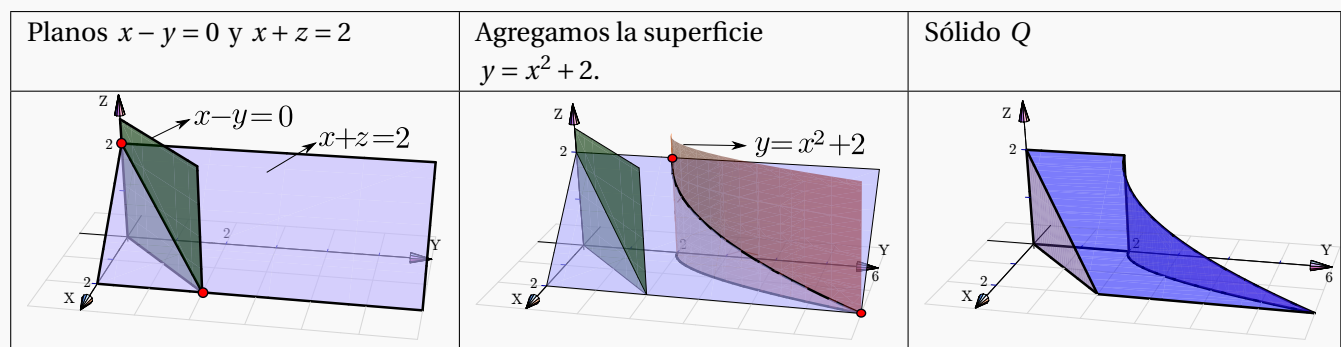
• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Ejemplo 2.47**

Dibuje el sólido  $Q$  limitado por la superficie  $y = x^2 + 2$  y los planos  $x - y = 0$ ;  $x + z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ .

**Solución:** Tal vez sea más sencillo dibujar primero los planos  $x - y = 0$  y  $x + z = 2$ ; luego agregamos la otra superficie  $y = x^2 + 2$ .

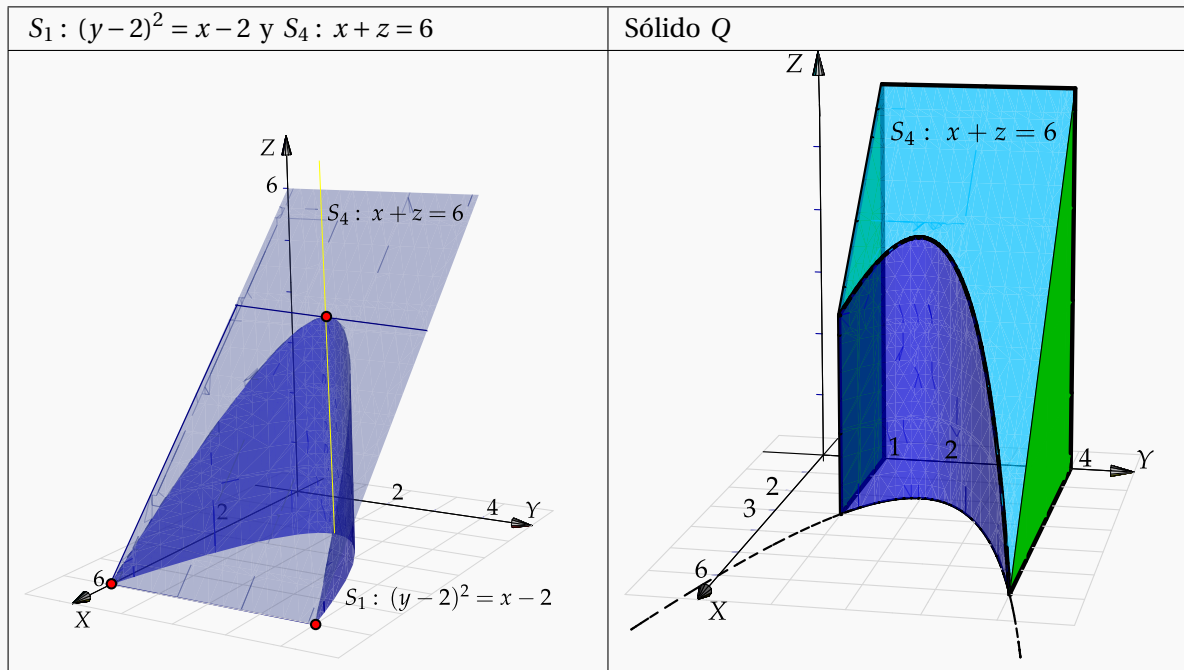
[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



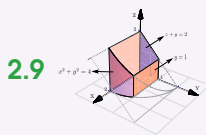
**Ejemplo 2.48**

Dibuje el sólido  $Q$  limitado por las superficies  $S_1 : (y-2)^2 = x-2$ ,  $S_2 : y=1$ ,  $S_3 : y=4$ ,  $S_4 : x+z=6$ ,  $S_5 : x=0$  y  $S_6 : z=0$ .

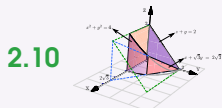
**Solución:** La parte delicada es dibujar la intersección entre las superficies  $S_1$  y  $S_4$ . El plano  $x+z=6$  debe ajustarse para lograr visualizar la intersección con la superficie  $S_1$ .

**8****Ejercicios**

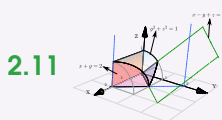
[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



Dibujar el sólido  $Q_1$  limitado por las superficies  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $z + y = 2$ ;  $y = 1$  y  $y = 0$ , en el I octante.

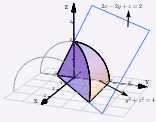


Sólido  $Q_2$  limitado por la superficie  $x^2 + y^2 = 4$ ; y los planos  $z + y = 2$ ;  $x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$  y  $x = 0$ , en el I octante



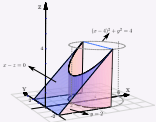
Sólido  $Q_3$  limitado por la superficie  $y^2 + z^2 = 1$ ; y los planos  $x + y = 2$ ;  $x - y + z = 0$ , en el I octante.

2.12



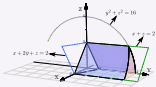
Sólido  $Q_4$  limitado por la superficie  $y^2 + z^2 = 4$  y los planos  $2x - 2y + z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ .

2.13



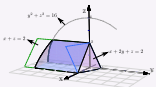
Sólido  $Q_5$  limitado por la superficie  $(x - 4)^2 + y^2 = 4$  y los planos  $x - z = 0$ ;  $y = -2$ ;  $y = 2$ ; y  $z = 0$  con  $0 \leq x \leq 4$ .

2.14



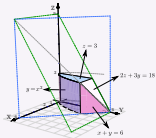
Sólido  $Q_6$  limitado por la superficie  $y^2 + z^2 = 16$  y los planos  $x + 2y + z = 2$ ;  $x + z = 2$ ;  $x = 0$ ; y  $z = 0$  en el I octante.

2.15



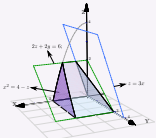
Sólido  $Q_7$  limitado por la superficie  $y^2 + z^2 = 16$  y los planos  $x + 2y + z = 2$ ;  $x + z = 2$ ;  $x = 0$ ; y  $z = 0$  en el I y IV octante.

2.16



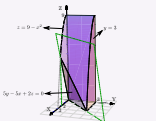
Sólido  $Q_8$  limitado por la superficie  $y = x^2$  y los planos  $2z + 3y = 18$ ;  $x + y = 6$ ;  $z = 3$ ;  $x = 0$ ; y  $z = 0$ , en el I octante.

2.17



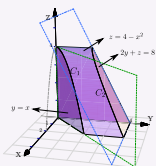
Sólido  $Q_9$  limitado por la superficie  $x^2 = 4 - z$  y los planos  $3z + 2y = 6$ ;  $z = 2x$ ;  $y = 0$ ; y  $z = 0$ .

2.18



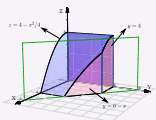
Sólido  $Q_{10}$  limitado por la superficie  $z = 9 - x^2$  y los planos  $5y - 5x + 2z = 0$  y  $y = 3$ , en el primer octante.

2.19



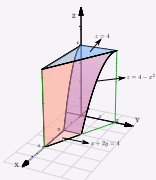
Sólido  $Q_{11}$  limitado por las superficies  $z = 4 - x^2$ ;  $2y + z = 8$ ;  $y = x$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ , en el primer octante.

2.20

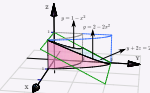


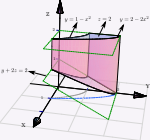
Sólido  $Q_{12}$  limitado por las superficies  $z = 4 - x^2/4$ ;  $y = 6 - x$ ;  $y = 4$  y  $y = 0$ , en el primer octante.

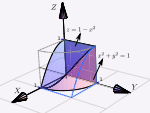
2.21

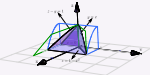


Sólido  $Q_{13}$  limitado por las superficies  $z = 4 - x^2$ ;  $x + 2y = 4$ ;  $z = 4$ ;  $z = 0$  y  $y = 0$ .

**2.22**  Sólido  $Q_{14}$  limitado por las superficies  $y = 2 - 2x^2$ ;  $y = 1 - x^2$ ;  $y + 2z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ ; en el I octante.

**2.23**  Sólido  $Q_{15}$  limitado por las superficies  $y = 2 - 2x^2$ ;  $y = 1 - x^2$ ;  $y + 2z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 2$ , en el I octante.

**2.24**  Sólido  $Q_{16}$  limitado por las superficies  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $z = 1 - x^2$ , en el I octante.

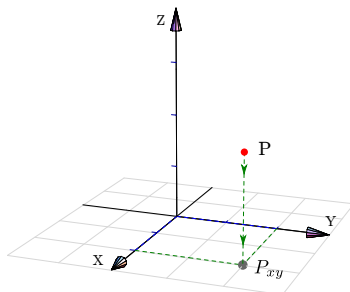
**2.25**  Sólido  $Q_{17}$  limitado por las superficies  $z = 1 - x^2$ ;  $z - y = 1$ ;  $y = x$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ , en el I y IV octante.

## 2.6 Proyección ortogonal de un sólido simple

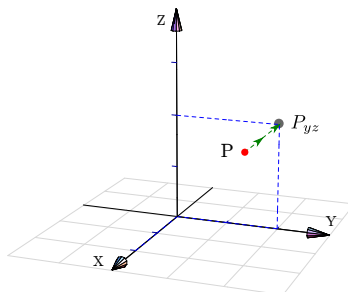
**Proyección ortogonal de un punto.** La proyección ortogonal de un punto  $P$  en un plano es el punto en este plano cuya distancia (euclidiana) a  $P$  es mínima. Intuitivamente corresponde a la “sombra” del punto proyectada perpendicularmente sobre el plano. En la figura que sigue se muestra la proyección de un punto  $P$  sobre cada uno de los planos  $XY$ ,  $YZ$  y  $XZ$ .

 [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

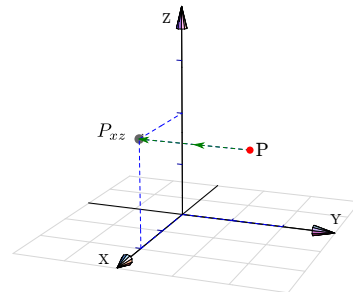
Proyección sobre  $XY$



Proyección sobre  $YZ$



Proyección sobre  $XZ$

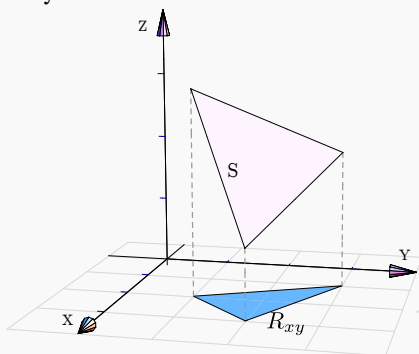
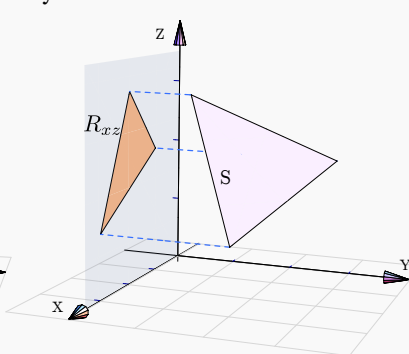
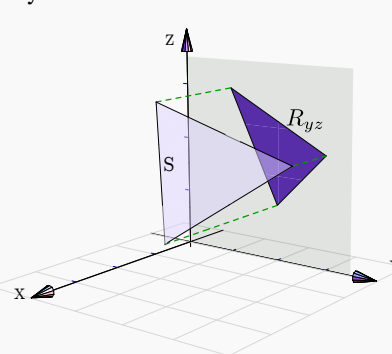


### Proyección ortogonal de una superficie.

La proyección perpendicular de una superficie  $S$  es la proyección de cada uno de sus puntos.

**Ejemplo 2.49**

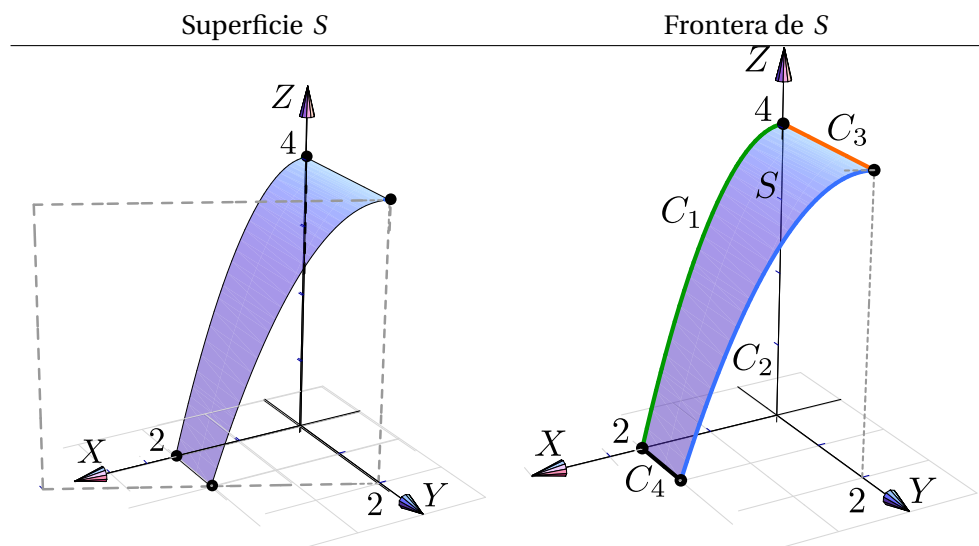
En este ejemplo visualizamos la proyección de un triángulo  $S$  sobre cada uno de los planos  $XY$ ,  $YZ$  y  $XZ$ .

Proyección sobre  $XY$ Proyección sobre  $YZ$ Proyección sobre  $XZ$ 

En la práctica nos interesa describir la proyección de manera analítica porque, en este curso, estas proyecciones van a ser regiones de integración.

Consideremos la superficie  $S: z = 4 - x^2$  limitada por el plano  $x + 2y = 4$  en el primer octante. En general, a este tipo de superficies se les puede determinar la proyección usando la proyección de las curvas frontera.

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



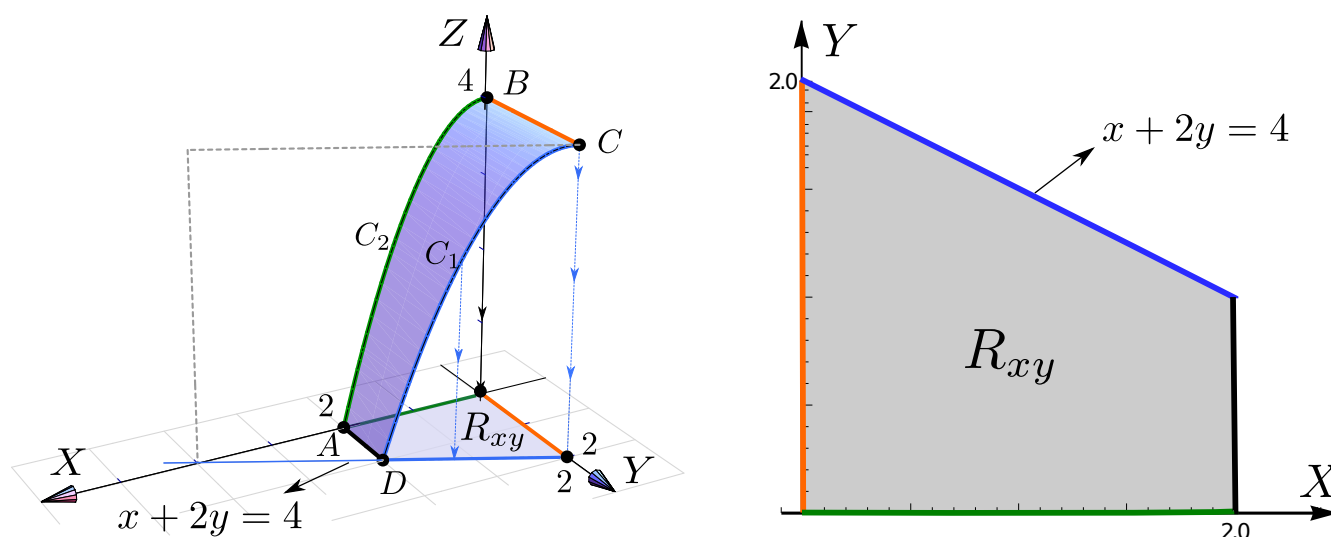
**Figura 2.22:** Superficie  $S: z = 4 - x^2$  limitada por el plano  $x + 2y = 4$  en el primer octante.

**Proyectando la superficie  $S$  en el plano  $XY$ .** Las curvas  $C_1$  y  $C_2$  están en planos perpendiculares al plano  $XY$ . La curva  $C_2$  está en el plano  $XZ$  por lo que su proyección es el segmento que va del origen hasta  $(2, 0, 0)$ .

La curva  $C_1$  está sobre el plano  $x + 2y = 4$ , como este plano es *perpendicular al plano  $XY$* , la proyección de esta curva está sobre la recta que genera el plano, es el segmento que va de  $(0, 2, 0)$  a  $(2, 1, 0)$ .

Finalmente podemos decir que  $R_{xy}$  está entre la recta  $y = 0$  y la recta  $x + 2y = 4$  con  $x \in [0, 2]$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 2.23:** Proyección de la superficie  $S$  en el plano  $XY$

**Proyectando la superficie  $S$  en el plano  $YZ$ .** La curva  $C_1$  está en un plano que *no es perpendicular* a  $YZ$ . Para calcular la ecuación de su proyección observamos que esta curva es la intersección de las superficies  $S: z = 4 - x^2$  y  $x + 2y = 4$ , lo que hacemos es eliminar la variable  $x$  para que nos quede una ecuación en términos de  $y$  y  $z$ .

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow z = 4 - (4 - 2y)^2, \text{ o también } (y - 2)^2 = -\frac{1}{4}(z - 4) \text{ (una parábola!).}$$

La proyección de la curva  $C_2$  es el segmento que va de  $(0, 0, 0)$  a  $(0, 0, 4)$ .

La proyección de la curva  $C_3$  es el segmento que va de  $(0, 0, 4)$  a  $(0, 2, 4)$ .

La proyección de la curva  $C_4$ , es el segmento que va de  $(0, 0, 0)$  a  $(0, 1, 0)$  pues el “vértice”  $D$  es la intersección de las rectas  $x = 4 - 2y$  y  $x = 2$  con lo cual se obtiene que la coordenada  $y$  es  $y = 1$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



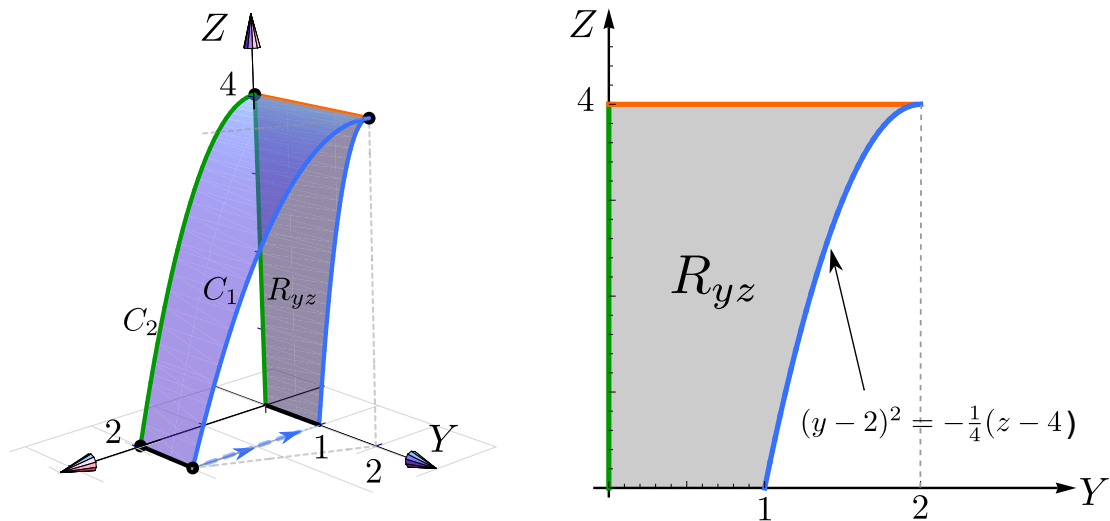


Figura 2.24: Proyección de la superficie  $S$  en el plano  $YZ$

**Proyectando la superficie  $S$  en el plano  $XZ$ .** La curvas  $C_1$  y  $C_2$  están sobre la superficie  $z = 4 - x^2$  que es perpendicular al plano  $XZ$ , por lo tanto la proyección de la superficie  $S$  es la misma curva  $z = 4 - x^2$  (no hay región).

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

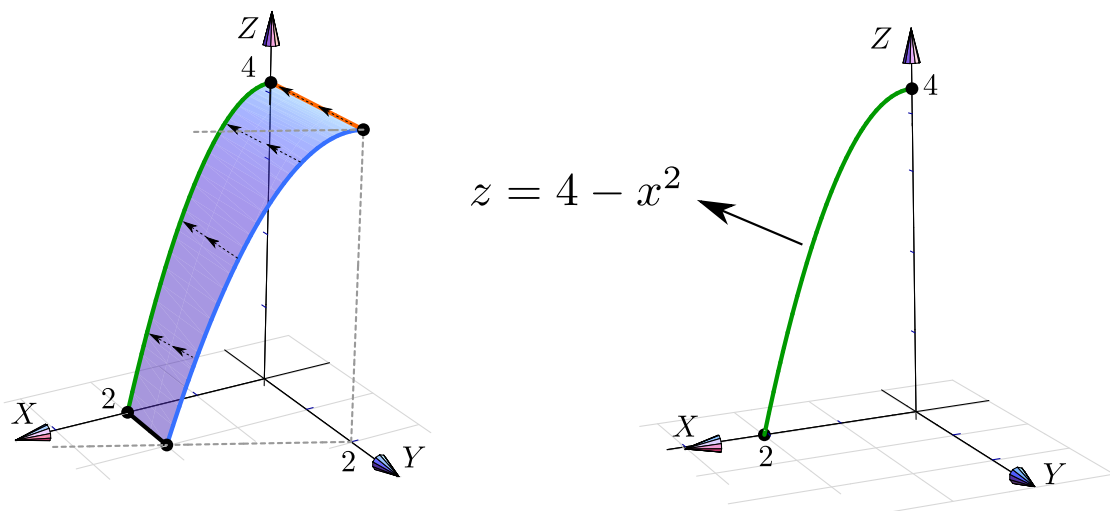


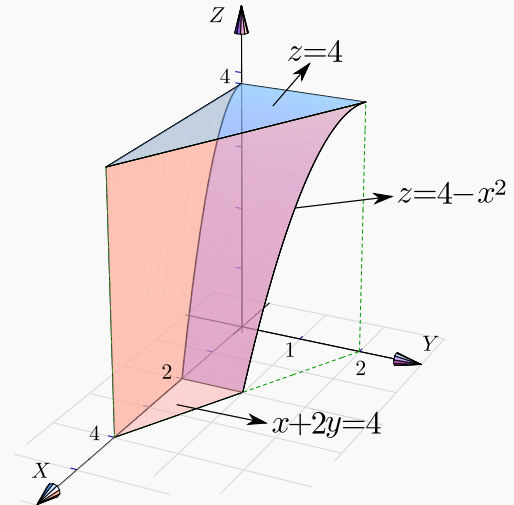
Figura 2.25: La proyección de la superficie  $S$  en el plano  $XZ$  es una curva

**Proyección de un sólido.** En el caso de sólidos simples, la proyección se determina proyectando las superficies (posiblemente no todas) que lo limitan.

**Ejemplo 2.50**

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Consideremos el sólido  $Q$  limitado por la superficie  $S: z = 4 - x^2$  y los planos  $x + 2y = 4$  y  $z = 4$ , en el primer octante.

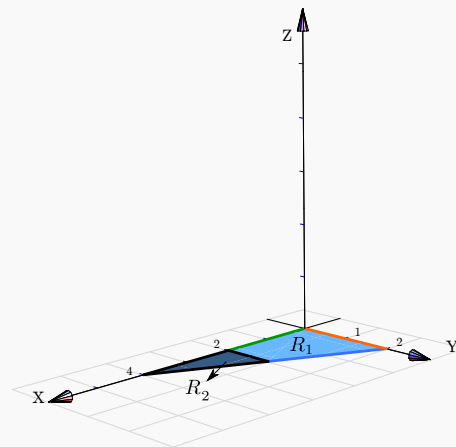
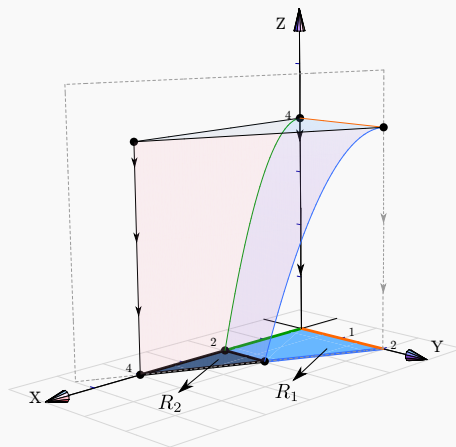


**Proyección sobre el plano  $XY$ :** La proyección es  $R_{xy} = R_1 + R_2$ . La superficie  $z = 4 - x^2$  se proyecta sobre  $R_1$  y el plano  $z = 4$  se proyecta sobre  $R_2$ . El plano  $x + 2y = 4$  se proyecta en la recta que genera este mismo plano.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

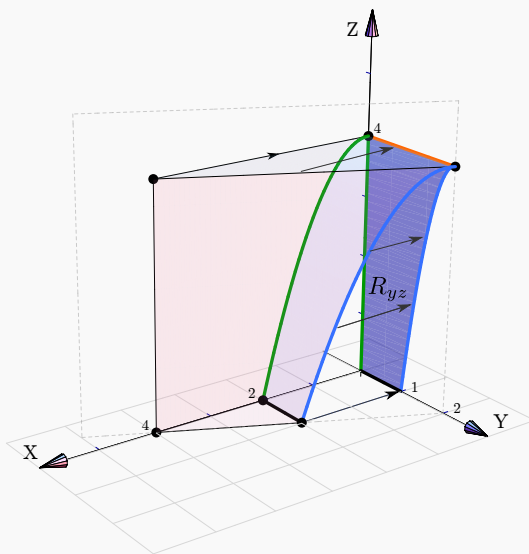
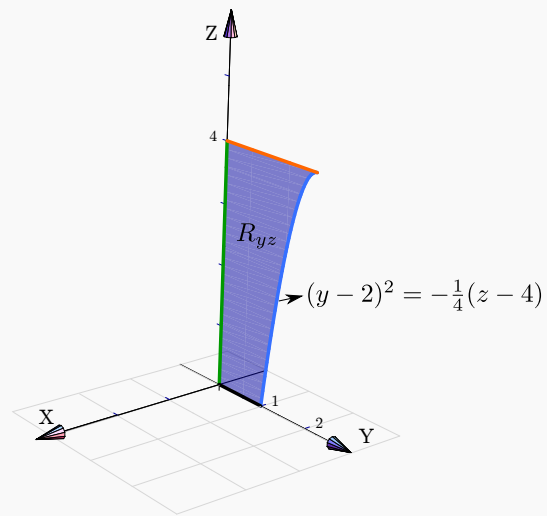
Proyectando el sólido  $Q$

Proyección sobre  $XY$



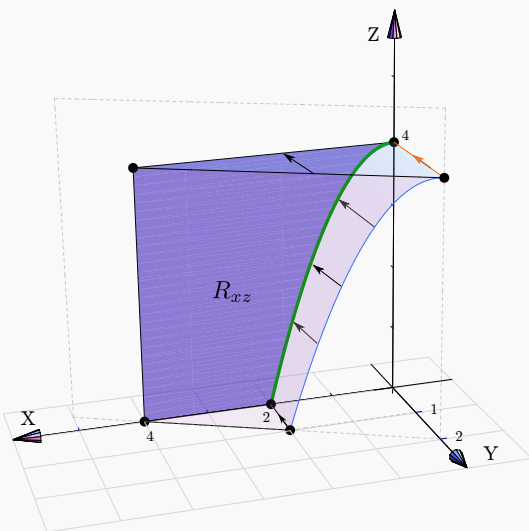
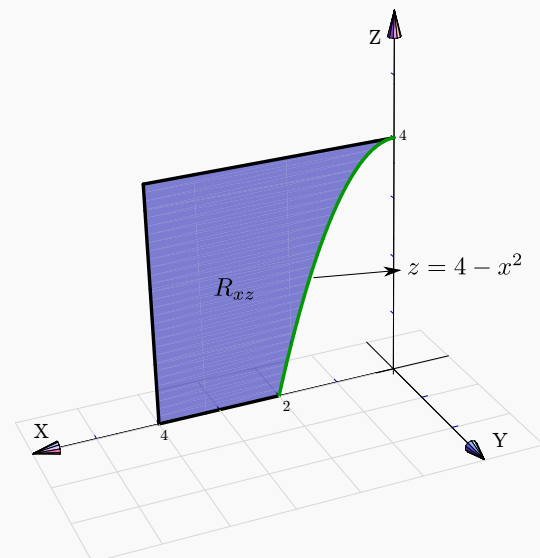
**Proyección sobre el plano  $YZ$ :** La proyección  $R_{yz}$  va desde la recta  $z = 0$  (eje  $Z$ ) hasta la parábola  $(y - 2)^2 = -\frac{1}{4}(z - 4)$  (esta ecuación la determinamos en el ejemplo anterior) con  $z \in [0, 4]$ . Tanto la superficie  $z = 4 - x^2$  como la porción del plano  $x + 2y = 4$  se proyectan sobre esta región. El plano  $z = 4$  se proyecta sobre el segmento que va de  $(0, 0, 4)$  a  $(0, 2, 4)$ .

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Proyectando el sólido  $Q$ Proyección sobre  $YZ$ 

**Proyección sobre el plano  $XZ$ :** La proyección  $R_{xz}$  va desde la parábola  $z = 4 - x^2$  hasta la recta  $x = 4$ . La porción del plano  $x + 2y = 4$  se proyecta sobre esta región. La superficie  $z = 4 - x^2$  se proyecta sobre la curva que la genera y el plano  $z = 4$  se proyecta sobre el segmento que va de  $(4, 0, 4)$  a  $(0, 0, 4)$

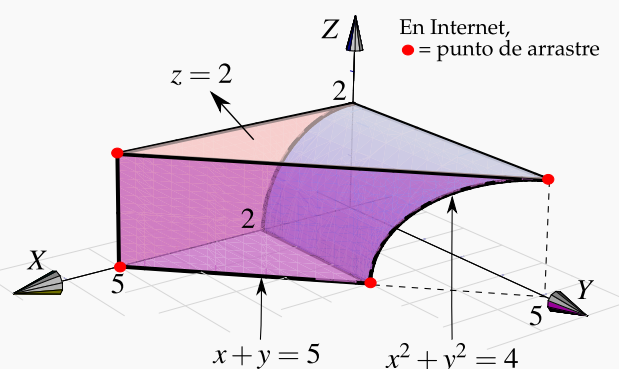
[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Proyectando el sólido  $Q$ Proyección sobre  $YZ$ 

**Ejemplo 2.51 (Interactivo).**

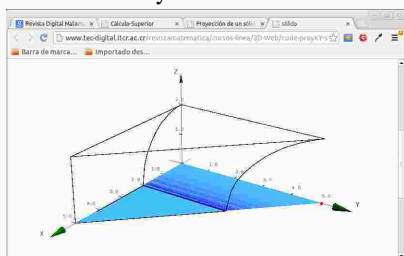
En este ejemplo, en las páginas web asociadas, usted podrá arrastrar los **puntos rojos** para simular la proyección respectiva.

Consideremos el sólido  $Q$  limitado por  $x^2 + z^2 = 4$ ,  $x + y = 5$  y  $z = 2$ ; en el primer octante.

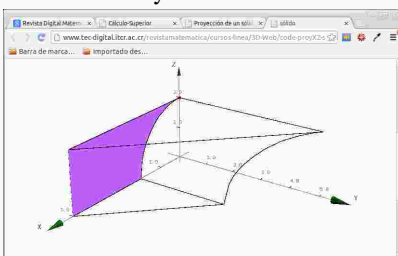


Hacer clic sobre la figura para ver en Internet – Arrastrar los **puntos rojos** en la dirección de la proyección

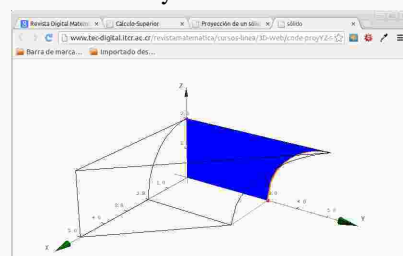
Proyección XY



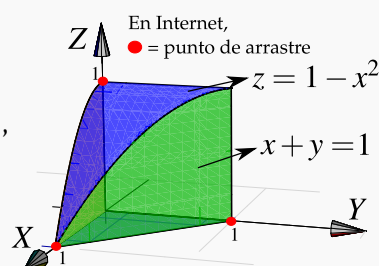
Proyección XZ



Proyección YZ

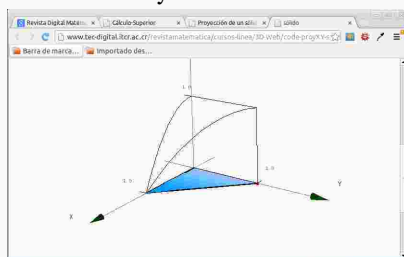
**Ejemplo 2.52 (Interactivo).**

Consideremos el sólido  $Q$  limitado por las superficies  $S_1 : z = 1 - x^2$ ,  $S_2 : x + y = 1$  y los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 0$ ; en el primer octante.

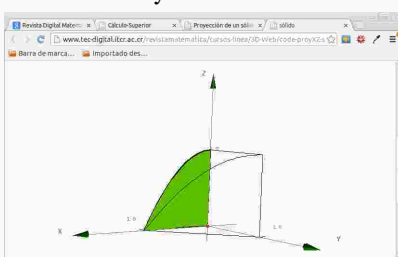


Hacer clic sobre la figura para ver en Internet – Arrastrar los **puntos rojos** en la dirección de la proyección

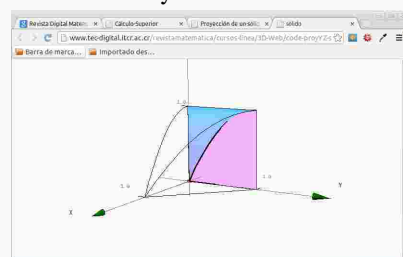
Proyección XY



Proyección XZ



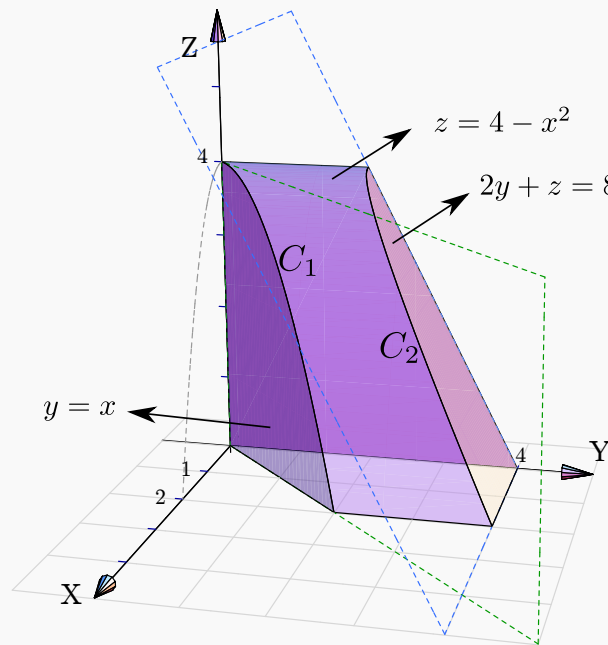
Proyección YZ



**Ejemplo 2.53**

Consideremos el sólido  $Q$  limitado por la superficie  $S: z = 4 - x^2$  y los planos  $2y + z = 8$  y  $y = x$ , en el primer octante.

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

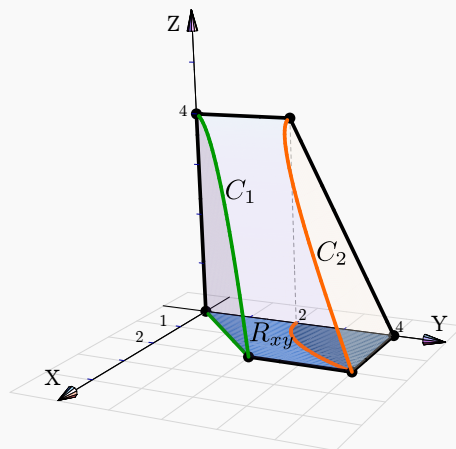
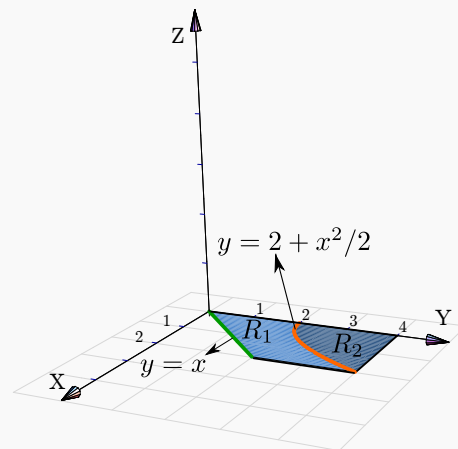


**Proyección sobre el plano  $XY$ .** La curva  $C_1$  está en el plano  $y = x$  que es perpendicular al plano  $XY$ ; su proyección es el segmento que va de  $(0,0,0)$  a  $(2,2,0)$ .

La curva  $C_2$  es la intersección de las superficies  $z = 4 - x^2$  y  $2y + z = 8$ ; la ecuación de su proyección en el plano  $XY$  se obtiene eliminando  $z$ ,

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 \\ y = 4 - z/2 \end{cases} \Rightarrow y = 4 - \frac{(4 - x^2)}{2}, \text{ o también } y = 2 + \frac{x^2}{2} \text{ (una parábola!).}$$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

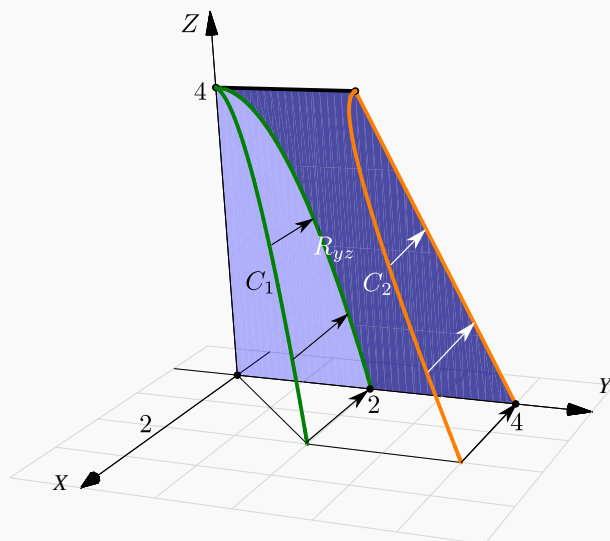
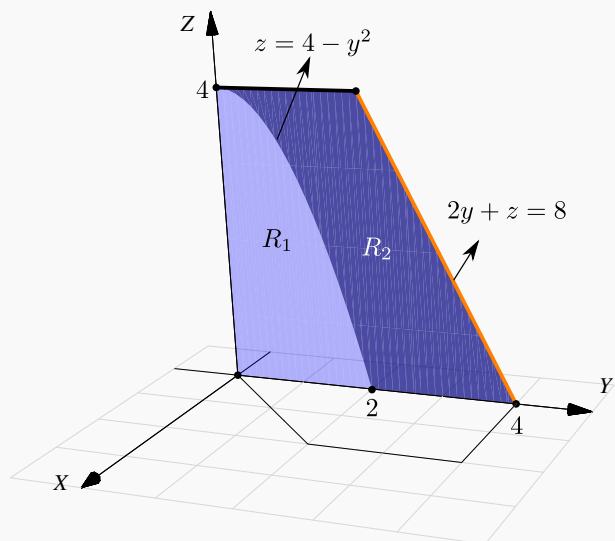
Proyectando el sólido  $Q$ Proyección sobre  $XY$ 

La proyección es  $R_{xy} = R_1 + R_2$ . La porción de la superficie  $z = 4 - x^2$  se proyecta sobre  $R_1$  mientras que la porción del plano  $2y + z = 8$  se proyecta sobre  $R_2$ .

El plano  $y = x$  es perpendicular al plano  $XY$  y por tanto se proyecta sobre su recta generadora  $y = x$ .

**Proyección sobre el plano  $YZ$ :** La curva  $C_1$  es la intersección de la superficie  $z = 4 - x^2$  con el plano  $y = x$  por lo que su proyección en el plano  $YZ$  es la parábola  $z = 4 - y^2$ . La curva  $C_2$  está en un plano perpendicular al plano  $YZ$ , por lo tanto su proyección está en la recta que genera el plano:  $2y + z = 8$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Proyectando el sólido  $Q$ Proyección sobre  $YZ$ 

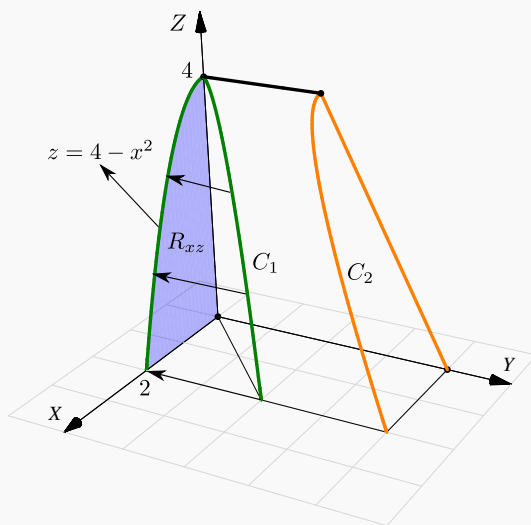
La proyección es  $R_{yz} = R_1 + R_2$ . La proyección de la porción del plano  $y = x$  es la región  $R_1$ . La proyección de la porción de superficie  $z = 4 - x^2$  es la región  $R_2$ . La proyección del plano  $2y + z = 8$  es el segmento que va de

$(4, 0, 0)$  a  $(0, 2, 4)$ .

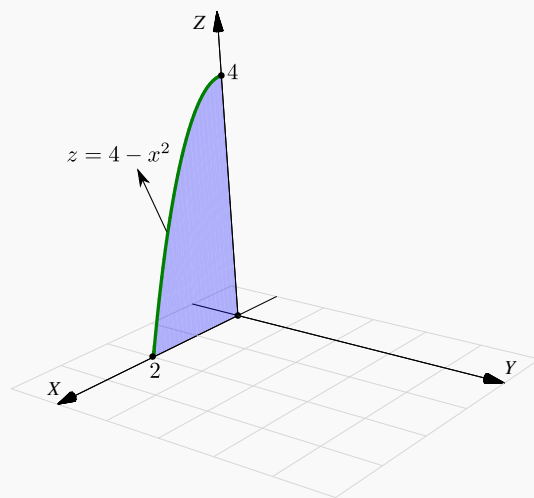
**Proyección sobre el plano  $XZ$ :** La proyección es  $R_{xz}$ . En este caso, las curvas  $C_1$  y  $C_2$  se proyectan sobre la curva  $z = 4 - x^2$ . La superficie  $z = 4 - x^2$  se proyecta sobre su curva generadora mientras que las porciones de los planos  $y = x$  y  $2y + z = 8$  se proyectan sobre  $R_{xz}$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Proyectando el sólido  $Q$



Proyección sobre  $XZ$

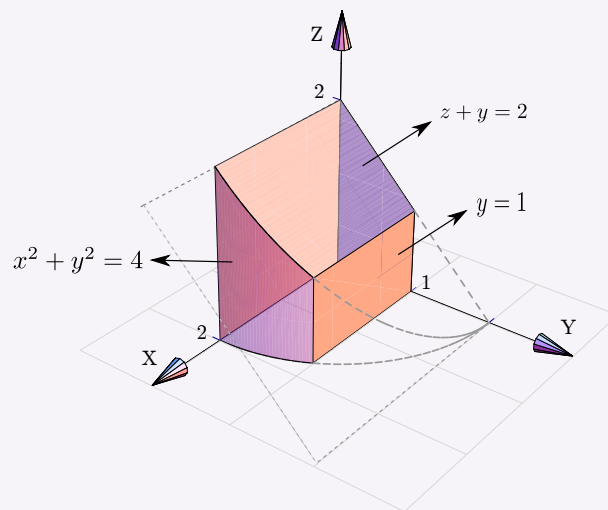


## 9

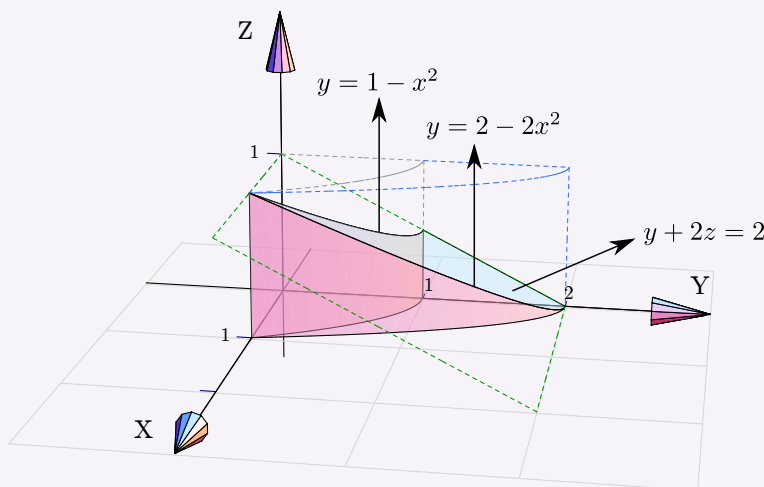
## Ejercicios

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

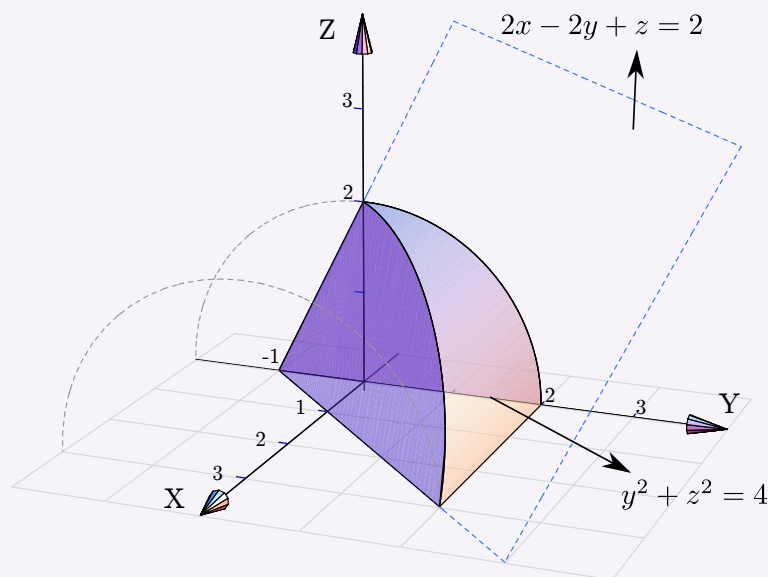
**2.26** Dibujar las proyecciones del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $z + y = 2$ ;  $y = 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ , en el I octante



**2.27** Dibujar las proyecciones del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por las superficies  $y = 2 - 2x^2$ ;  $y = 1 - x^2$ ;  $y + 2z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ ; en el I octante.



**2.28** Dibujar las proyecciones del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por la superficie  $y^2 + z^2 = 4$  y los planos  $2x - 2y + z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ .

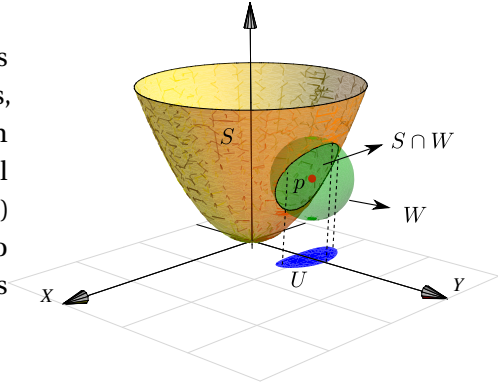


## 2.7 (\*) Definición formal de una superficie

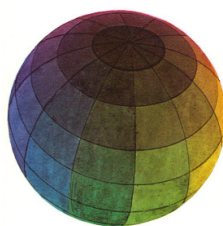
No todas las superficies (suaves) en  $\mathbb{R}^3$  se pueden describir con una sola ecuación  $F(x, y, z) = 0$  (con o sin desigualdades). En general, para estudiar superficies de una manera más general, se requiere estudiarlas “localmente”.



A veces se define una superficie de manera *local*. Una superficie  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que en un entorno de cualquiera de sus puntos, luce como un “parche” de  $\mathbb{R}^2$ , es decir, para cada  $p \in S$  existe un entorno abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  y un entorno  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  que contiene a  $p$  tal que se puede establecer una biyección continua (homeomorfismo)  $r_p : U \rightarrow S \cap W$ . A cada homeomorfismo  $r_p$  se le llama “parche” o *parametrización* del conjunto abierto  $S \cap W$ . Una colección de tales parches que cubren  $S$  se llama un *atlas* de  $S$ .



Si una superficie  $S$  tiene ecuación  $z = f(x, y)$  con  $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ , entonces la superficie sería de un solo “parche”, y una parametrización sería  $r(x, y) = x \hat{i} + y \hat{j} + f(x, y) \hat{k}$  con  $(x, y) \in D$ . Más adelante veremos más ejemplos de superficies y parametrizaciones.



Versión actualizada de este libro:  
<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/>

Introducción  
 Derivadas parciales.  
 Derivadas parciales de orden superior  
 Función diferenciable. Diferencial total.  
 Regla de la cadena.  
 Derivadas de una función definida de manera implícita.  
 (\*) Derivación implícita: Caso de dos ecuaciones.  
 Gradiente.  
 Gradiente, curvas y superficies de nivel.  
 Derivada direccional  
 Plano tangente y el vector normal.

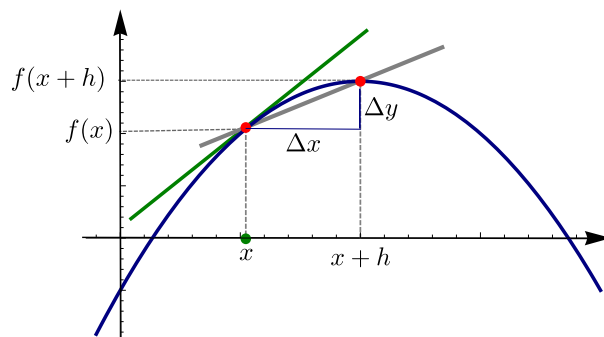
## 3 — Cálculo diferencial en varias variables

### 3.1 Introducción

La derivada de una función de una variable mide la tasa de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente. La derivada de la función  $y = f(x)$  en  $x$  es,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Geométricamente, la derivada de  $f$  en  $x$  es la pendiente de la recta tangente a  $f$  en  $x$ .



Si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , la derivada de  $f$  en  $\mathbf{x} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , en la dirección de un vector unitario  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , mide la tasa (instantánea) de cambio de  $f$  a través de la recta  $L(h) = \mathbf{x} + h\mathbf{v}$  cuando  $h = 0$ . De nuevo, esta derivada en la dirección de  $\mathbf{v}$  se obtiene como un límite,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

El cambio en la recta es  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x} - h\mathbf{v}\| = \|h\mathbf{v}\| = h$  ( $\mathbf{v}$  es unitario). Geométricamente, esta derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva  $C(h) = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2, f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}))$  en  $h = 0$ . Esta curva es la intersección de la superficie  $S$  de ecuación  $z = f(x, y)$  con el plano generado por la recta  $L$  tal y como se muestra en la figura (3.1).

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

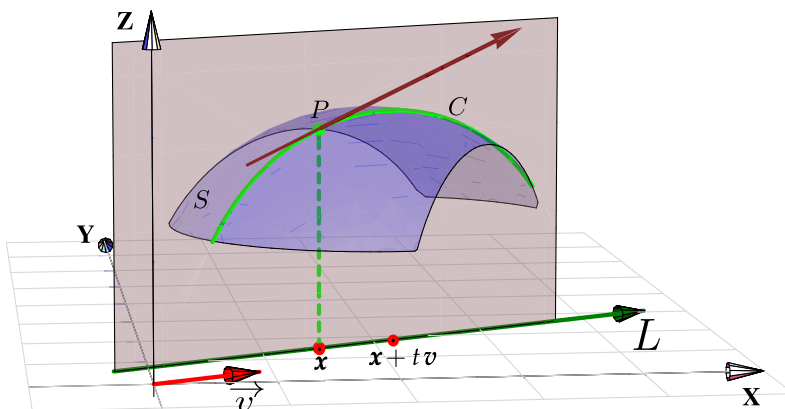


Figura 3.1: Derivada direccional en la dirección de  $\vec{v}$

De particular interés son la derivada en la dirección del eje  $X$ , denotada  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , y la derivada en la dirección del eje  $Y$ , denotada  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ; llamadas *derivadas parciales* respecto a  $x$  e  $y$  respectivamente.

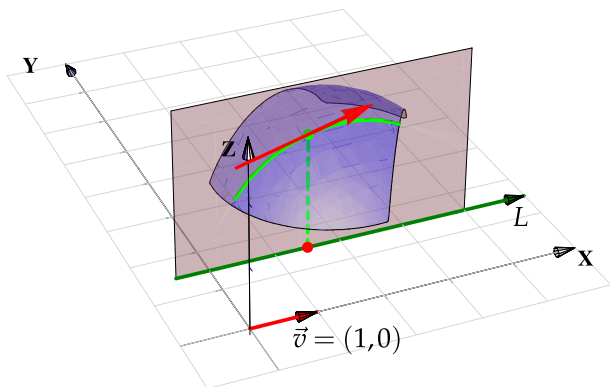


Figura 3.2: Derivada parcial en la dirección de  $X$

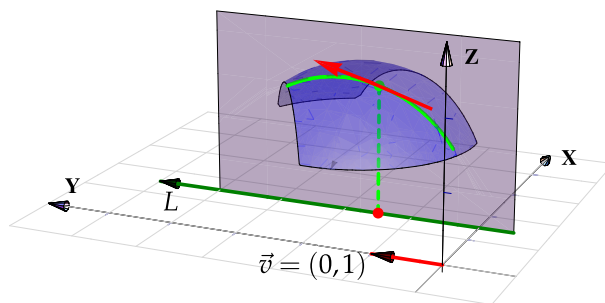


Figura 3.3: Derivada parcial en la dirección de  $Y$

## 3.2 Derivadas parciales.

### Definición 3.1 (Derivadas parciales).

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces la *derivada parcial*  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  de  $f$  respecto a la variable  $x_i$  en el punto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Aquí  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  con un 1 en la  $i$ -ésima posición. El dominio de  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

es el subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  en el que este límite existe.

### Caso de dos variables

Cuando  $z = f(x, y)$ , es común denotar las derivadas parciales con  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $z_x$  o  $f_x$ . Según la definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Es decir, para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}$  derivamos de manera ordinaria  $f$  respecto a  $x$  pensando en  $y$  como una constante y para calcular  $\frac{\partial f}{\partial y}$  derivamos de manera ordinaria  $f$  respecto a  $y$  pensando en  $x$  como una constante. Esto es válido siempre y cuando apliquen los teoremas de derivadas en una variable.

### Ejemplo 3.1 (Cálculo directo y por definición).

Sea  $f(x, y) = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$ , entonces aplicando la regla del producto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3x^{2/3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3y^{2/3}}.$$

Esta es la manera de derivar  $f$  respecto a  $x$  y respecto a  $y$  usando teoremas de derivadas. Sin embargo esto no decide si la función es derivable o no en  $(0, 0)$ . Para saber si estas derivadas parciales existen en  $(0, 0)$ , se debe calcular usando la definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

es decir, en este caso la derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe en  $(0, 0)$  y es cero y también  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

**Ejemplo 3.2** (Derivadas parciales de funciones de dos variables).

En este ejemplo se muestra como calcular derivadas parciales usando las reglas de derivación ordinaria.

Recordemos que en una variable,  $[kf(x)]' = kf'(x)$  y  $\left[\frac{k}{f(x)}\right]' = \frac{-k \cdot f'(x)}{f^2(x)}$ .

$$\bullet z = x^2 y^2 + y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 0$$

$$\bullet z = x^2 y^2 + y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y + 1$$

$$\bullet z = \frac{x^3}{y^5} = \frac{1}{y^5} \cdot x^3 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^5} \cdot 3x^2$$

$$\bullet z = \frac{x^3}{y^5} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^3 \cdot 5y^4}{y^{10}}$$

Recordemos que en una variable,  $[a^u]' = a^u \ln(a) u'$  y  $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$ .

$$\bullet \text{ Si } z = x^y \text{ con } x > 0, \text{ entonces } \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$$\bullet \text{ Si } z = x^y \text{ con } x > 0, \text{ entonces } \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$\bullet \text{ Si } C(r, \theta) = r^n \cos(n\theta) \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ una constante. Entonces } \frac{\partial C}{\partial r} = nr^{n-1} \cos(n\theta) \text{ y } \frac{\partial C}{\partial \theta} = -nr^n \sin(n\theta)$$

Recordemos que en una variable, si  $u = g(x)$  entonces  $[f(u)]' = f'(u) \cdot u'$ .

$$\bullet \text{ Si } z = \arctan(y/x) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{-y \cdot 1}{x^2}$$

$$\bullet \text{ Si } z = \frac{\cos(xy) + x \sin 2y}{2} \text{ entonces } \frac{\partial z}{\partial x}(\pi, \pi/2) = \left. \frac{-y \sin(xy) + \sin 2y}{2} \right|_{x=\pi, y=\pi/2} = \frac{-\pi \cdot \sin(\pi^2/2)}{4}.$$

• Sea  $f$  de una variable y derivable, y  $z = f(u)$  con  $u = x^5 + y^3$ , entonces  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot 5x^4$  y  $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot 3y^2$

• Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables de una variable y  $z = \frac{f(u)}{g(u)}$  con  $u = x^5 + y^3$ , entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}[f(u)] \cdot g(u) - \frac{\partial}{\partial x}[g(u)] \cdot f(u)}{g^2(u)} = \frac{f'(u) \cdot 5x^4 \cdot g(u) - g'(u) \cdot 5x^4 \cdot f(u)}{g^2(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}[f(u)] \cdot g(u) - \frac{\partial}{\partial y}[g(u)] \cdot f(u)}{g^2(u)} = \frac{f'(u) \cdot 3y^2 \cdot g(u) - g'(u) \cdot 3y^2 \cdot f(u)}{g^2(u)}$$

### 3.3 Derivadas parciales de orden superior

Si  $f$  es una función de dos variables  $x$  e  $y$ , entonces sus derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  también son funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales  $(f_x)_x$ ,  $(f_x)_y$ ,  $(f_y)_x$  y  $(f_y)_y$ , las cuales se llaman segundas derivadas parciales de  $f$ . Si  $z = f(x, y)$ , se utilizan diferentes notaciones para estas derivadas parciales,

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

La notación  $f_{xy}$  o  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  significa que primero derivamos con respecto a  $x$  y luego con respecto a  $y$ , mientras que para calcular  $f_{yx}$  el orden se invierte.

#### Ejemplo 3.3

Calcule las segundas derivadas parciales de  $f(x, y) = x^3 + x^2 y^2 + y^3$

**Solución:** Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^2$$

$$f_y(x, y) = 2x^2y + 3y^2$$

De donde obtenemos que :

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 2y^2$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [2x^2y + 3y^2] = 4xy$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [3x^2 + 2xy^2] = 4xy$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y + 2x^2$$

### Ejemplo 3.4

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces derivable y sea  $z = f(u)$  con  $u = x^3y^4$ . Entonces,

$$\bullet \frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot 3x^2y^4$$

$$\bullet \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot x^3 4y^3$$

$$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) \cdot 3x^2y^4 \cdot 3x^2y^4 + 6xy^4 f'(u)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot 4x^3y^3 \cdot 4x^3y^3 + 12x^3y^2 f'(u)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''(u) \cdot 4x^3y^3 \cdot 3x^2y^4 + 12x^2y^3 f'(u)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(u) \cdot 3x^2y^4 \cdot 4x^3y^3 + 12x^2y^3 f'(u)$$

### Ejemplo 3.5

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se usan para expresar leyes físicas. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , se conoce como ecuación de Laplace, en honor a Pierre Laplace (1749 - 1827).

Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas y desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones relacionadas con conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

Compruebe que la función  $u(x, y) = e^y \sen x$  satisface la ecuación de Laplace.

**Solución:** Las primeras derivadas parciales están dadas por

$$u_x = e^y \cos x$$

$$u_y = e^y \sen x$$

con lo cual

$$u_{xx} = -e^y \sen x$$

$$u_{yy} = e^y \sen x$$



$$\text{de donde } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \sin x + e^y \sin x = 0$$

### Ejemplo 3.6

La ecuación de onda  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , donde  $a$  es una constante, describe el movimiento de una onda, que puede ser una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante. Si  $f$  y  $g$  son funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función  $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$  satisface la ecuación de onda.

**Solución:** Las derivadas de  $u(x, y)$  con respecto a  $x$  están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x + at) + g'(x - at), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x + at) + g''(x - at)$$

Las derivadas de  $u(x, y)$  con respecto a  $t$  están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = af'(x + at) - ag'(x - at), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at)$$

Sustituyendo obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at) = a^2 [f''(x + at) + g''(x - at)] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

### Ejemplo 3.7

Consideremos  $f$  y  $g$  funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función  $u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$  satisface la ecuación diferencial parcial  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ .

**Solución:** Las derivadas de  $u(x, y)$  con respecto a  $x$  están dadas por

$$u_x = f(x + y) + xf'(x + y) + yg'(x + y)$$

$$u_{xx} = f'(x + y) + f'(x + y) + xf''(x + y) + yg''(x + y) = 2f'(x + y) + xf''(x + y) + yg''(x + y)$$

$$u_{xy} = f'(x + y) + xf''(x + y) + g'(x + y) + yg''(x + y)$$

$$u_y = x f'(x + y) + g(x + y) + y g'(x + y)$$

$$u_{yy} = x f''(x+y) + g'(x+y) + g'(x+y) + y g''(x+y) = 2f''(x+y) + 2g'(x+y) + y g''(x+y)$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= 2f'(x+y) + x f''(x+y) + y g''(x+y) - 2f'(x+y) - 2x f''(x+y) - 2g'(x+y) \\ &\quad - 2y g''(x+y) + x f''(x+y) + 2g'(x+y) + y g''(x+y) = 0 \end{aligned}$$

### Ejemplo 3.8

Compruebe que la función  $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  satisface la ecuación diferencial de Laplace en derivadas parciales  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ .

**Solución:** Calculemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y^2} = -\frac{-x^2 + 2y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z^2} = -\frac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

y al sumarmas obtenemos el resultado deseado.

**Observación:** Note que las *derivadas parciales mixtas*  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  en el ejemplo anterior son iguales. El siguiente teorema, da las condiciones bajo las cuales podemos afirmar que estas derivadas son iguales. El teorema es conocido de Clairaut o también como Teorema de Schwarz.

#### Teorema 3.1 (Teorema de Clairaut o Teorema de Schwarz).

Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar donde  $D$  es un disco abierto con centro en  $(a, b)$  y radio  $\delta$ , si las funciones  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son continuas en  $D$ , entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

**Ejemplo 3.9** (Hipótesis en el Teorema de Clairaut).

Sea  $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  y  $f(0, 0) = 0$ . Se tiene  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , pero  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ . En efecto, aunque  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  están definidas en  $(0, 0)$ , *no son continuas* en este punto. Para ver esto, podemos calcular estas derivadas de dos maneras distintas y observar que el valor difiere. Primero derivamos sobre la recta  $x = 0$  y luego sobre la recta  $y = 0$ .

$$z_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hy(h^2 - y^2)}{h(h^2 + y^2)} = -y$$

y

$$z_x(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hx(h^2 - y^2)}{h(h^2 + y^2)} = x$$

Ahora

$$z_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1 \quad \text{y} \quad z_{yx}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1$$

Esto muestra que  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ . El gráfico de  $f(x, y)$  muestra un salto en  $(0, 0)$

**10****Ejercicios**

**3.1** Sea  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $f_y(2, 1)$ .

**3.2** Sea  $f(x, y) = \ln^5(x^y + x^2 + 2^y)$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

**3.3** Sea  $z(x, y) = 2(ax + by)^2 - (x^2 + y^2)$  con  $a^2 + b^2 = 1$ . Verifique que  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ .

**3.4** Sea  $z = f\left(\frac{x^2}{y}\right)$  con  $f$  derivable. Verifique que  $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

**3.5** Sea  $z = \sqrt{xy + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$ . Demuestre que  $zx \frac{\partial z}{\partial x} + zy \frac{\partial z}{\partial y} = xy$ .

**3.6** Sea  $C(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/kt}$ . Verifique que esta función satisface la ecuación (de difusión)

$$\frac{k}{4} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

**3.7** Sea  $z = f(x^2y + y) \cdot \sqrt{x + y^2}$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ .

**3.8** Verifique que  $u(x, y) = e^y \sin x$  satisface la ecuación de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

**3.9** Sea  $a \in \mathbb{R}$  una constante. Verifique que  $u(x, t) = \sin(x - at) + \ln(x + at)$  es solución de la ecuación de onda  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ .

**3.10** Sea  $a \in \mathbb{R}$  una constante y  $f$  y  $g$  funciones dos veces derivables. Verifique que  $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$  es solución de la ecuación de onda  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ .

**3.11** Verifique que  $z = \ln(e^x + e^y)$  es solución de las ecuación diferencial  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$  y de la ecuación diferencial  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$ .

**3.12** Sea  $f$  una función derivable en todo  $\mathbb{R}$  y sea  $w(x, y) = f(y \sin x)$ . Verifique que

$$\cos(x) \frac{\partial w}{\partial x} + y \sin(x) \frac{\partial w}{\partial y} = y f'(y \sin x)$$

**3.13** Sea  $g(x, y) = x^2 \sin(3x - 2y)$ . Verifique la identidad

$$x \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2 \frac{\partial g}{\partial y} + 6x \cdot g(x, y).$$

**3.14** La resistencia total  $R$  producida por tres conductores con resistencias  $R_1, R_2$  y  $R_3$  conectadas en paralelo en un circuito eléctrico está dado por la fórmula  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ . Calcule  $\frac{\partial R}{\partial R_1}$ . Sugerencia: derive a ambos lados respecto a  $R_1$ .

**3.15** La ley de gases para un gas ideal de masa fija  $m$ , temperatura absoluta  $T$ , presión  $P$  y volumen  $V$  es  $PV = mRT$  donde  $R$  es la constante universal de los gases ideales. Verifique que  $\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1$ .

**3.16** La energía cinética de un cuerpo de masa  $m$  y velocidad  $v$  es  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . Verifique que  $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$ .

**3.17** Sea  $f$  y  $g$  funciones dos veces derivables. Sea  $u = x^2 + y^2$  y  $w(x, y) = f(u) \cdot g(y)$ . Calcule  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$  y  $\frac{\partial w}{\partial y}$ .

**3.18** Sea  $f$  y  $g$  funciones dos veces derivables. Sea  $w(x, y) = f(u) + g(v)$  donde  $u = \frac{x}{y}$  y  $v = \frac{y}{x}$ . Calcule  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ .

**3.19** Sea  $w = e^{3x} \cdot f(x^2 - 4y^2)$ , donde  $f$  es una función derivable. Calcule  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ .

**3.20** Sea  $u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta)$  con  $n \in \mathbb{N}$  una constante. Verifique que  $u$  satisface la ecuación

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

### 3.4 Función diferenciable. Diferencial total.

#### Definición 3.2 Función diferenciable

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si las derivadas parciales de  $f$  existen y son continuas en un entorno de  $(x_0, y_0) \in U$ , entonces  $f$  es *diferenciable* en  $(x_0, y_0)$ .

En una variable,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  se puede aproximar con el diferencial  $dy = f'(x_0) dx$ . De manera similar, el cambio en  $f$  en dos variables es

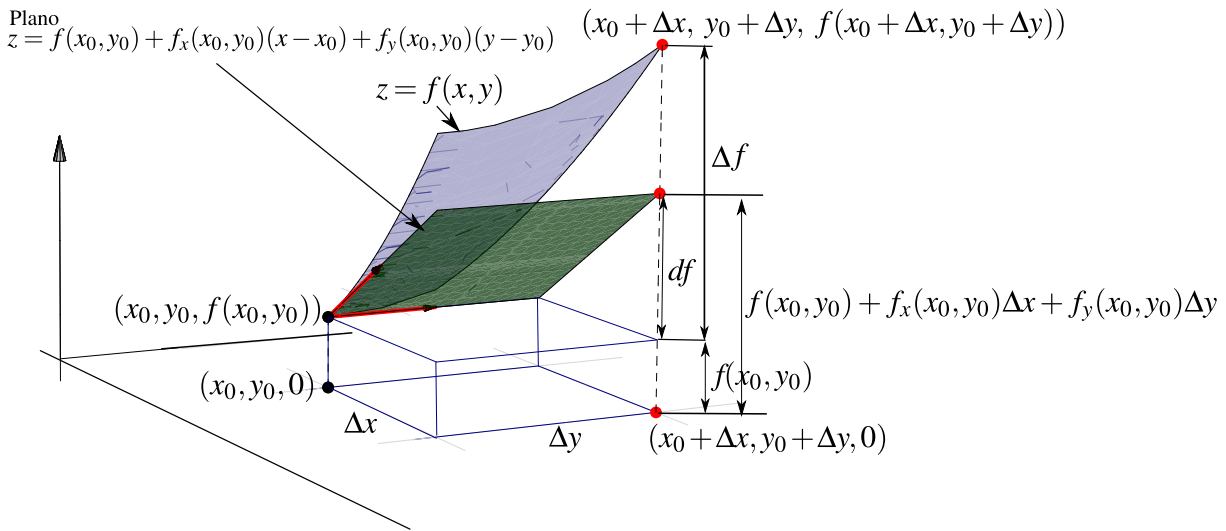
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

y se puede aproximar con el *diferencial total*,

$$df = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$$

Es decir, si  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  y si  $\Delta x = x - x_0$  y  $\Delta y = y - y_0$  son pequeños, entonces  $f$  se puede aproximar usando el plano tangente:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y.$$



Si  $z = f(x, y)$  es diferenciable, el diferencial total  $df$  representa el incremento de  $f$  a lo largo del plano tangente a  $f$  en el punto  $(x, y)$ . Sería como calcular con el plano tangente en vez de usar la superficie  $S$  (ver figura anterior).

### 3.5 Regla de la cadena.

Recordemos que en una variable, si  $f(u)$  y  $u(x)$  son derivables, entonces la regla de la cadena establece

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$

La regla de la cadena nos indica como varía  $f$  conforme recorremos la trayectoria  $u(x)$ . Formalmente es la derivada de  $f$  en presencia de un cambio de variable  $u$ . En funciones de varias variables la relación persiste en un siguiente sentido.

#### Teorema 3.2 (Regla de la cadena – Caso I).

Sean  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$  derivables y  $z = f(x, y)$  diferenciable en  $(x, y) = (x(t), y(t))$ , entonces  $z = f(x(t), y(t))$  es derivable y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

#### Teorema 3.3 (Regla de la cadena – Caso II.)

Sean  $u = u(x, y)$  y  $v = v(x, y)$  con derivadas parciales en  $(x, y)$ . Si  $z = f(u, v)$  es diferenciable en  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$  entonces  $z = f(u, v)$  tiene derivadas parciales de primer orden en  $(x, y)$  y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

#### Ejemplo 3.10

Sea  $z(x, y) = \sqrt{\arctan(y/x) + \tan(xy)}$ . Podemos hacer un cambio de variable y calcular  $\frac{\partial z}{\partial x}$  usando la regla de la cadena. Sea  $u(x, y) = \arctan(y/x)$  y  $v(x, y) = \tan(xy)$ , entonces  $z = \sqrt{u + v}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{-y \cdot 1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{u+v}} y \sec^2(xy) \end{aligned}$$

Al sustituir  $u$  y  $v$  obtenemos el resultado completo, si fuera necesario.

**Ejemplo 3.11**

Sea  $z(x, y) = x^2 + 3y^2$ , donde  $x = e^t$  y  $y = \cos(t)$  entonces

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2xe^t - 6y \sin(t) = 2e^{2t} - 6\cos(t) \sin(t)\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.12**

Sea  $z(u, v) = x^2 e^{y^3}$ , donde  $x = uv$  y  $y = u^2 - v^3$  entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= 2xe^{y^3} \frac{\partial x}{\partial u} + 3x^2 y^2 e^{y^3} \frac{\partial y}{\partial u} = 2xe^{y^3} v + 3x^2 y^2 e^{y^3} 2u \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= 2xe^{y^3} \frac{\partial x}{\partial v} + 3x^2 y^2 e^{y^3} \frac{\partial y}{\partial v} = 2xe^{y^3} u + 3x^2 y^2 e^{y^3} \cdot -3v^2\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.13**

Sea  $f$  una función diferenciable y  $z(x, y) = f(x^2, xy^2)$ . Para derivar usando la regla de la cadena usamos el cambio de variable  $u = x^2$  y  $v = xy^2$ , entonces  $z(x, y) = f(u, v)$  y

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y^2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2xy\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.14**

Sea  $f$  una función derivable y  $z = f(x, y)$  con  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , entonces

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot -r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta$$

**Ejemplo 3.15**

Si  $z(x, y) = g(y) \cdot f(x - 2y, y^3)$ . Calcule  $z_x$  y  $z_{xy}$ .

**Solución:** Sea  $u = x - 2y$ ,  $v = y^3$ . Entonces  $z(x, y) = g(y) f(u, v)$ .

$$z_x = g(y) [f_u \cdot 1 + f_v \cdot 0] = g(y) f_u(u, v)$$

$$z_{xy} = g'(y) \cdot 1 \cdot f_u(u, v) + g(y) [-2 f_{uu} + 3y^2 f_{uv}]$$

**Ejemplo 3.16**

Sea  $V = V(P, T)$ . Si  $P(V - b)e^{RV} = RT$ , con  $b, R$  constantes, calcule  $\frac{\partial V}{\partial T}$ .

**Solución:**  $V$  es función de  $P$  y  $T$ . Derivamos a ambos lados respecto a  $T$ ,

$$\frac{\partial}{\partial T} [P(V - b)e^{RV}] = \frac{\partial}{\partial T} [RT]$$

$$P [V_T e^{RV} + (V - b)e^{RV} R V_T] = R$$

$$\therefore V_T = \frac{R}{P e^{RV} (1 + (V - b)R)}.$$



**Ejemplo 3.17**

Sea  $z(x, y) = g(u, v)$  con  $u = x^2 y^2$  y  $v = xy$ . Calcule  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

**Solución:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot 2xy^2 + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} \right] \cdot 2xy^2 + \frac{\partial}{\partial y} [2xy^2] \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + x \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} \right]$$

$$= \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot u_y + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \cdot v_y \right] \cdot 2xy^2 + 4xy \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + x \cdot \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot u_y + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot v_y \right]$$

$$= \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \cdot 2yx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \cdot x \right] \cdot 2xy^2 + 4xy \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + x \cdot \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \cdot 2yx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \cdot x \right]$$

**Ejemplo 3.18**

Sea  $F(u, v) = -u - v$  con  $u^2 = x - y$  y  $v^2 = x + y$ . Si  $u \neq 0$  y  $v \neq 0$ , verifique

a.)  $F_x = -\frac{u+v}{2uv}$ .

b.)  $F_y = -\frac{v-u}{2uv}$ .

**Solución:** Primero veamos que  $2u u_x = 1$ ,  $2v v_x = 1$ ,  $2u u_y = -1$  y  $2v v_y = 1$ . Por lo tanto

a.)  $F_x = F_u u_x + F_v v_x = -1 \cdot \frac{1}{2u} - 1 \cdot \frac{1}{2v} = -\frac{u+v}{2uv}$ .

b.)  $F_y = F_u u_y + F_v v_y = -1 \cdot \left(-\frac{1}{2u}\right) - 1 \cdot \frac{1}{2v} = -\frac{v-u}{2uv}$ .

# 11

## Ejercicios

**3.21** Sea  $z = xy^2 + x$  con  $x = \sin t$  y  $y = \tan(t)$ . Calcule  $\frac{dz}{dt}$ .

**3.22** Sea  $w = x^2 + 2xy + y^2$  con  $x = t \cos t$  y  $y = t \sin t$ . Calcule  $\frac{dw}{dt}$ .

**3.23** Sea  $z = u\sqrt{u+v^2}$  con  $u = xy$  y  $v = \arctan(y/x)$ . Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

**3.24** Sea  $z = g(y) \cdot f(x, y)$  con  $f$  y  $g$  funciones con derivadas de segundo orden.

a.) Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$

b.) Calcule  $\frac{\partial z}{\partial y}$

c.) Si  $x = t^2$  y  $y = u^2 + t^3$ , calcule  $\frac{\partial z}{\partial t}$  y  $\frac{\partial z}{\partial u}$

**3.25** Sea  $z = f(xy, x)$ . Si  $f$  tiene derivadas parciales de segundo orden  $f_u, f_{uv}, f_{uu}$  y  $f_{vv}$ , calcular  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

**3.26** Sea  $z = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ , donde  $f = f(x, y)$  es una función con derivadas de segundo orden. Si  $x = u^2 + v$  y  $y = u + v^2$ , calcule  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y  $\frac{\partial z}{\partial v}$ .

**3.27** Sea  $z = f(u, v)$ , donde  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = xy$ . Si  $f$  tiene derivadas parciales de segundo orden  $f_u, f_{uv}, f_{uu}$  y  $f_{vv}$  continuas (es decir,  $f_{uv} = f_{vu}$ ). Verifique que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

**3.28** Sea  $z = f(x^2 + \cos y, x^2 - 1) - g(3xy^2)$  con  $g$  derivable y  $f$  con derivadas parciales continuas y de segundo orden. Calcule  $z_{xy}$

**3.29** Sea  $z = x^2 f^4(xy, y^2)$  con  $f$  con derivadas parciales continuas. Calcule  $z_y$  y  $z_x$

**3.30** Sea  $z = f(x^2 - y, xy)$  donde  $s = x^2 - y$  y  $t = xy$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial t}$  y  $\frac{\partial f}{\partial s}$  (Sugerencia: Calcule  $z_x$  y  $z_y$  y despeje lo que se pide).

**3.31** Verifique que si  $f$  es diferenciable, la función  $z = f(xy)$  satisface la ecuación

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

**3.32** Sea  $u = f(r)$  con  $f$  derivable y  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Mostrar que

$$x u_x + y u_y + z u_z = r f'(r)$$

**3.33** Supongamos que se sabe que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \operatorname{sen}(xy) \quad \text{con } x > 0 \text{ y } y > 0. \quad (*)$$

Verifique que aplicando un cambio de variable de  $(x, y)$  a  $(u, v)$  donde  $u = xy$  y  $v = x/y$ ; entonces la ecuación  $(*)$  se convierte en la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v \operatorname{sen} u$$

Sugerencia: Como  $z = z(u, v)$ ; calcule las derivadas parciales y luego despeje  $x$  y  $y$  en el cambio de variable. Al sustituir, obtiene el resultado.

### 3.6 Derivadas de una función definida de manera implícita.

Supongamos que se conoce que  $z$  es una función de  $x$  e  $y$ , es decir,  $z = f(x, y)$ , pero que  $z$  *está definida de manera implícita* por una ecuación del tipo

$$F(x, y, z) = 0$$

Estas situaciones ya las hemos encontrado antes, por ejemplo en la ecuación de una esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Esta ecuación define a  $z$  como una función de  $x$  y  $y$  y en este caso,  $z$  se puede despejar:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{y} \quad z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Cuando una función está definida de manera implícita, no siempre es posible despejarla. Por ejemplo considere  $y^2 + xz + z^2 - e^z - 1 = 0$ . Pero si podemos calcular las derivadas parciales.

Podemos deducir, de manera informal, las fórmulas para  $z_x$  y  $z_y$ . Supongamos que  $z = z(x, y)$  es una función diferenciable que satisface la ecuación  $F(x, y, z(x, y)) = 0$  en algún conjunto abierto  $D$ .

Sea  $g(x, y) = F(x, y, z) = 0$ , aplicando la regla de la cadena a  $g(x, y) = F(u, v, w)$ , con  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$  y  $w(x, y) = z(x, y)$ , obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Ahora, como  $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$  y  $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ , entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Despejando,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ en todos los puntos de } D \text{ donde } \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{(x,y,z(x,y))} \neq 0$$

De manera similar,  $\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

### Teorema 3.4

Si  $F$  es diferenciable en un conjunto abierto  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  y si la ecuación  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  define a  $x_n$  como una función diferenciable  $x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  en algún conjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

en aquellos puntos en los que  $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$ .

**$z$  definida de manera implícita por  $F(x, y, z) = 0$ .**

Si  $z = z(x, y)$  está definida de manera implícita por  $F(x, y, z) = 0$  de acuerdo a las hipótesis del teorema 3.6, entonces

$$z_x = - \frac{F_x}{F_z} \text{ y } z_y = - \frac{F_y}{F_z}.$$

En el teorema de la función implícita podemos intercambiar variables. Por ejemplo, si  $x$  y  $z$  son las variables independientes y si se cumplen las hipótesis del teorema,

$$y_x = - \frac{F_x}{F_y} \text{ y } y_z = - \frac{F_z}{F_y}.$$

Este teorema se puede generalizar para ecuaciones  $F(x, y, z, u) = 0$ .

**Ejemplo 3.19**

Sea  $z$  definida de manera implícita por  $F(x, y, z) = xyz + x + y - z = 0$ . Como se cumplen las condiciones del teorema 3.6 entonces

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{zy+1}{xy-1} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{zx+1}{xy-1}$$

**Ejemplo 3.20**

Calcule  $z_x$  y  $z_y$  si  $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$  define a  $z$  como  $z = z(x, y)$ .

**Solución:** Dado que  $F_x = 2x$ ,  $F_y = -4y - z + 1$ ,  $F_z = 6z - y$ , entonces si  $F_z \neq 0$ , por el teorema 3.6,

$$z_x = -\frac{2x}{6z-y}$$

$$z_y = -\frac{1-4y-z}{6z-y}$$

en  $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6z(x, y) - y = 0\}$

**Ejemplo 3.21**

Considere la función  $z$  definida de manera implícita por  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ . Calcular  $z_x$ ,  $z_y$ ,  $z_{xx}$ ,  $z_{yy}$  y  $z_{yx}$

**Solución:**

$z$  está definida de manera implícita por  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ . Entonces,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z}$$

Para calcular  $z_{xy}$ ,  $z_{xx}$  y  $z_{yy}$  debemos notar que  $z_x$  y  $z_y$  *no son* funciones definidas de implícita, como tal derivamos de manera ordinaria.

$$z_{xx} = \frac{\partial(z_x)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{x}{z}\right)}{\partial x} = -\frac{1 \cdot z - x z_x}{z^2} = -\frac{z - x\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2},$$

$$z_{yy} = \frac{\partial(z_y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\frac{y}{z}\right)}{\partial y} = -\frac{1 \cdot z - y z_y}{z^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3},$$

$$z_{yx} = \frac{\partial(z_y)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{y}{z}\right)}{\partial x} = \frac{y \cdot z_x}{z^2} = \frac{y\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2}.$$

### Ejemplo 3.22

Si  $F(xz, yz) = 0$  define a  $z$  como función implícita de  $x$  e  $y$  y además cumple con las condiciones del teorema 3.6 en cada punto de una región  $D$ , entonces verifique que, en  $D$ , se satisface la ecuación

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -z$$

**Solución:** Sea  $u = xz$  y  $v = yz$ , entonces  $F(xz, yz) = F(u, v) = 0$ .

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_u \cdot 0 + F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_u \cdot z + F_v \cdot 0}{F_u \cdot x + F_v \cdot y}$$

Luego

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= -y \cdot \frac{F_v \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} + -x \cdot \frac{F_u \cdot z}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\ &= -\frac{z(F_u \cdot x + F_v \cdot y)}{F_u \cdot x + F_v \cdot y} \\ &= -z \end{aligned}$$

### 3.7 (\*) Derivación implícita: Caso de dos ecuaciones.

Supongamos que  $u = u(x, y)$  y  $v = v(x, y)$  son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, y, u, v) = 0$$

Para deducir las expresiones para  $u_x, u_y, v_x, v_y$  se resuelve el sistema

$$\begin{cases} dF = F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ dG = G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{cases}$$

para  $du$  y  $dv$ . Si  $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$ , obtenemos

$$du = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} dx - \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} dy$$

como  $du = u_x dx + u_y dy$  entonces se obtienen las fórmulas (siempre y cuando  $J \neq 0$ .)

$$u_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{J}, \quad u_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{J}$$

y

$$v_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{J}, \quad v_y = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{J}$$

### Ejemplo 3.23

Si  $u = u(x, y)$  y  $v = v(x, y)$  son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$F = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0,$$

$$G = u + v - x^2 + y = 0,$$

calcular  $u_x$  y  $u_y$ .

**Solución:** Como  $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(u - v)$ ,

entonces,

$$u_x = \frac{x(1 - 2v)}{u - v} \quad \text{y} \quad u_y = \frac{1 + 2v}{2(u - v)}.$$

**Ejemplo 3.24**

Sea  $z = f(x, y)$  definida por  $z = u + v$  donde  $u = u(x, y)$  y  $v = v(x, y)$  son funciones definidas de manera implícita por las ecuaciones

$$F = u + e^{u+v} - x = 0$$

$$G = v + e^{u-v} - y = 0$$

Si  $u = v = 0$  entonces  $x = y = 1$ . Calcular  $z_x(1, 1)$ .

**Solución:**  $z_x = u_x + v_x$ . Podemos calcular  $u_x$  y  $v_x$  usando las fórmulas respectivas, sin embargo, para cálculos numéricos es más práctico derivar respecto a  $x$  las expresiones  $F = 0$  y  $G = 0$ . En efecto, derivando respecto a  $x$  obtenemos

$$u_x + e^{u+v}(u_x + v_x) - 1 = 0 \quad \text{y} \quad v_x + e^{u-v}(u_x - v_x) = 0$$

de modo que cuando  $x = 1, y = 1, v = u = 0$  se obtiene

$$2u_x + v_x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad u_x = 0$$

con lo que  $u_x = 0, v_x = 1$  si  $x = 1, y = 1, v = u = 0$ . Así que  $z_x(1, 1) = 0 + 1 = 1$ .

**12****Ejercicios**

**3.34** Si  $x^2 y^2 + \sin(xyz) + z^2 = 4$  define a  $z$  como función implícita de  $x$  e  $y$ , verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**3.35** Sea  $g\left(\frac{xy}{z}, x^2 + y^2\right) = 0$  una ecuación que define a  $z$  como una función de  $x$  e  $y$ . Verifique que si  $g_x, g_y$  y  $g_z$  existen y son continuas en toda la región en la que  $g_z \neq 0$ , entonces

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{z(x^2 - y^2)}{xy}$$

**3.36** Sea  $z = f(z/xy)$  con  $f$  dos veces derivable. Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  y verifique que



$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**3.37** Sea  $z = x \ln(yz)$ . Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  y  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**3.38** Si  $f(zx, y^2) = xy$  define a  $z$  como función implícita de  $x$  y  $y$ , calcule  $z_{xy}$ .

**3.39** Si  $f(zx, y^2) + g(z^2) = 5$  define a  $z$  como función implícita de  $x$  y  $y$ , calcule  $z_x$  y  $z_y$ .

**3.40** Sea  $f$  una función con derivadas de segundo orden continuas y  $g$  una función dos veces derivable. Supongamos que la ecuación  $2g(z) + f(x^2, y^2) = 0$  define a  $z$  como función implícita de  $x$  y  $y$ .

a) Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$

b) Calcule  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

**3.41** Sea  $f$  una función con derivadas de segundo orden continuas y  $g$  una función dos veces derivable. Supongamos que la ecuación  $g(z)f^3(x^2, y^2) = 0$  define a  $z$  como función implícita de  $x$  y  $y$ . Calcule  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

## 3.8 Gradiente.

### Definición 3.3 (Campo Gradiente).

Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función (o campo) escalar diferenciable en una región  $R$ , entonces la función (o campo) gradiente de  $f$  es la función vectorial  $\nabla f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$$

En el caso  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

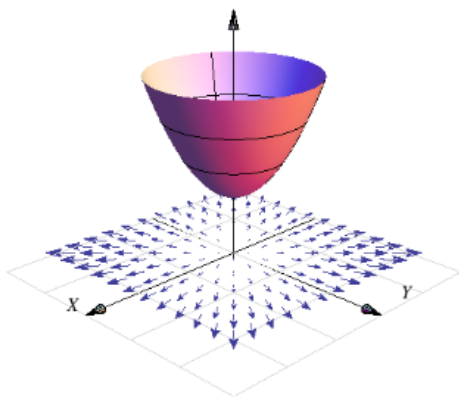
En el caso  $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

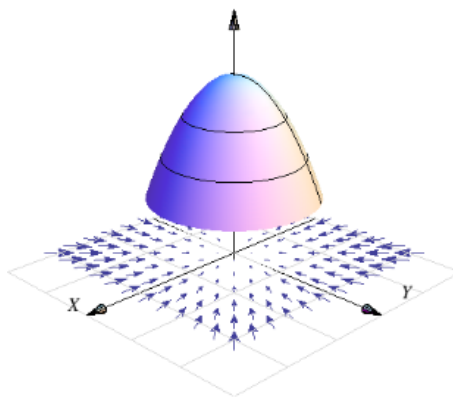
**Interpretación geométrica del campo gradiente.** El gradiente  $\nabla z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial (campo gradiente). Por ejemplo, consideremos el paraboloide  $z - 1 = x^2 + y^2$ , el campo gradiente de  $z$  es  $\nabla z = (2x, 2y)$ . Una representación gráfica de esta superficie y de algunos vectores (trasladados) se ve en la figura 3.4. Los vectores apuntan en la dirección de máximo crecimiento del paraboloide y la magnitud de estos vectores nos dan una medida de la

‘intensidad’ de esta razón de cambio.

Ahora consideremos el paraboloide  $z - 3 = -x^2 - y^2$ , el campo gradiente de  $z$  es  $\nabla z = (-2x, -2y)$ . Una representación gráfica de esta superficie y de algunos vectores (trasladados) se ve en la figura 3.5. Los vectores apuntan en la dirección de máximo decrecimiento del paraboloide y la magnitud de estos vectores nos dan una medida de la ‘intensidad’ de esta razón de cambio



**Figura 3.4:**  $\nabla z(P)$  apunta en la dirección de máximo crecimiento respecto a cada punto  $P$



**Figura 3.5:**  $\nabla z(P)$  apunta en la dirección de máximo decrecimiento respecto a cada punto  $P$

### Ejemplo 3.25

- Si  $f(x, y) = \sin xy + x^2 y^2$ , calcule  $\nabla f(\pi, 1)$ .

**Solución:** El gradiente está dado por :

$$\nabla f(x, y) = (y \cos xy + 2xy^2) \hat{i} + (x \cos xy + 2x^2 y) \hat{j}$$

y evaluando

$$\nabla f(\pi, 1) = (2\pi - 1) \hat{i} + (2\pi^2 - \pi) \hat{j}$$

- Si  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , calcule  $\nabla z(x, y)$ .

**Solución:** Excepto en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  (curva de nivel  $z = 0$ ), se puede calcular

$$\nabla f(x, y) = \left( -\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z} \right) = -\frac{x}{z} \hat{i} - \frac{y}{z} \hat{j}$$

- Si  $G(x, y, z) = x^2z + z^3y + xyz$ , calcule  $\nabla G(x, y, z)$ .

**Solución:**

$$\nabla G(x, y, z) = (G_x, G_y, G_z) = (2xz + yz) \hat{i} + (z^3 + xz) \hat{j} + (x^2 + 3z^2y + xz) \hat{k}$$

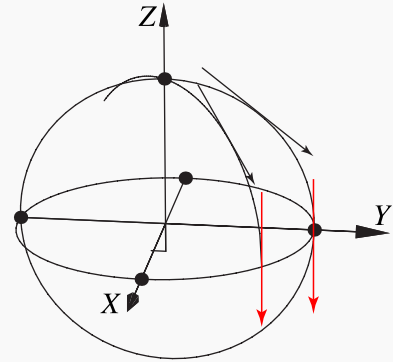
### Ejemplo 3.26

Consideremos la superficie  $S$  de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Sea  $P = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in S$ .

El gradiente de  $z$  es  $\nabla z(x, y) = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}\right)$ .

$$\nabla z(P) = (-1, -1).$$

El gradiente no está definido si  $z = 0$  porque las derivadas parciales se indefinen (las tangentes a la superficies sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  son rectas verticales)



## 3.9 Gradiente, curvas y superficies de nivel.

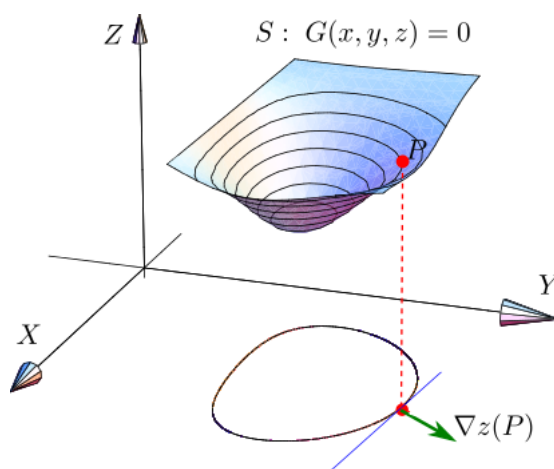
Recordemos que si  $z = f(x, y)$  entonces la curva  $z = c$  (es decir,  $c = f(x, y)$ ) la llamamos “curva de nivel”. Si tenemos  $w = g(x, y, z)$ , la superficie  $w = 0$  (es decir  $0 = g(x, y, z)$ ), se denomina *superficie de nivel*  $w = 0$ .

Si  $S$  es una superficie de ecuación  $G(x, y, z) = 0$ , con  $G$  derivable con continuidad en el plano, y si  $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ , entonces,

1. Si se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita, en  $P$  se tiene,  $\nabla z(x, y) = \left(-\frac{G_x}{G_z}, -\frac{G_y}{G_z}\right)$

El vector  $\nabla z(x_0, y_0)$  es perpendicular a la curva de nivel  $z = z_0$ , es decir  $\nabla z(x_0, y_0)$  es perpendicular al vector tangente en  $(x_0, y_0)$ . Si necesitamos un vector perpendicular, podríamos usar solamente  $(-G_x, -G_y)$ .

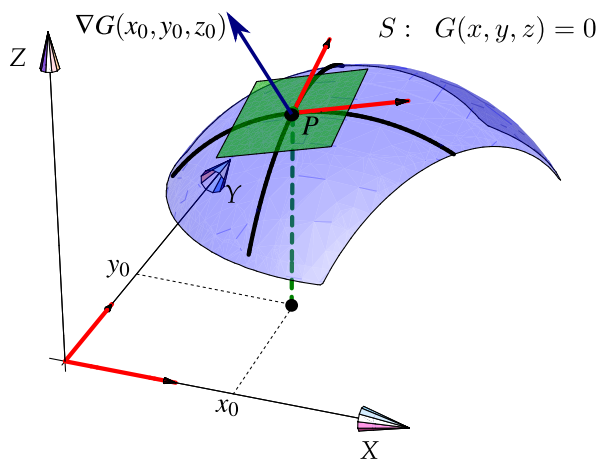
Por supuesto, si la ecuación de la superficie es  $z = f(x, y)$ , podemos calcular el gradiente de la manera usual tomando  $G = z - f(x, y) = 0$  y entonces  $G_z = 1$ .



**Figura 3.6:**  $\nabla z(x_0, y_0, z_0)$  es perpendicular a la curva de nivel  $z = z_0$ .

2. El vector  $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$  es perpendicular a la superficie de nivel  $w = 0$ , es decir  $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$  es perpendicular a cada curva de la superficie  $S$ , que pasa por  $P = (x_0, y_0, z_0)$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 3.7:**  $\nabla G(P)$  es perpendicular (al plano tangente) a  $S$  en  $P$ .

### Ejemplo 3.27

Considere la curva  $C$  de ecuación  $y^2 - x^2(1+x) = 0$ . Sea  $P = (1/6, \sqrt{7}/\sqrt{216})$ . Observe que  $P \in C$ . Calcule un vector *perpendicular* a la curva en  $P$ .

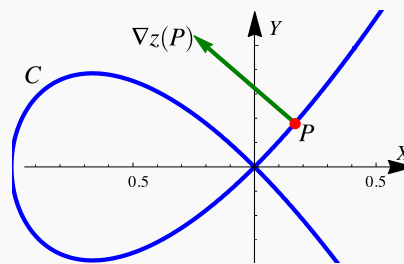
**Solución:** Podemos ver  $C$  como una curva de nivel de  $z = y^2 - x^2(1+x)$ , concretamente la curva de nivel  $z = 0$ .

De acuerdo a la teoría, el vector  $\nabla z(P)$  es perpendicular a la curva de nivel  $C$  en  $P$ . Veamos

$$\nabla z(x, y) = (-x^2 - 2x(x+1), 2y)$$

$$\nabla z(P) = (-5/12, \sqrt{7}/\sqrt{54})$$

En la figura 3.8 se muestra gráficamente la situación.



**Figura 3.8:**  $\nabla z(P)$  es un vector perpendicular a la curva en  $P$

### Ejemplo 3.28

Considere la superficie  $S$  de ecuación

$$\frac{1}{9}(z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0.$$

Sea  $P = (3, 2, 1 + 3\sqrt{3})$ . Observe que  $P \in S$ . Calcule un vector *perpendicular* a la superficie  $S$  en  $P$ .

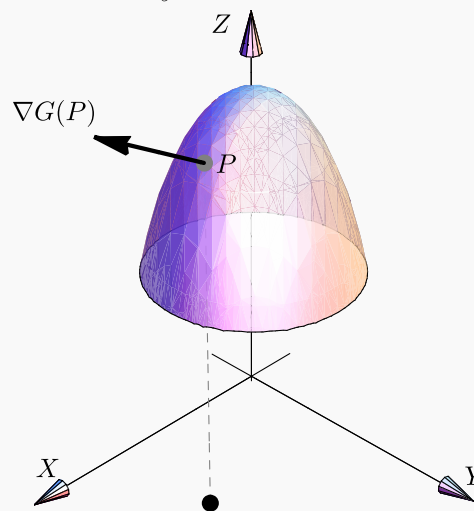
**Solución:** De acuerdo a la teoría, el vector  $\nabla G(P)$  es perpendicular a la curva de nivel  $S$  en  $P$  donde  $G(x, y, z) = \frac{1}{9}(z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4$ .

$$\nabla G(x, y, z) = (G_x, G_y, G_z) = \left( 2(x-2), 2(y-2), \frac{2}{9}(z-1) \right)$$

$$\nabla G(P) = \left( 2, 0, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

En la figura 3.9 se muestra gráficamente la situación.

$$S: G(x, y, z) = \frac{1}{9}(z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4$$

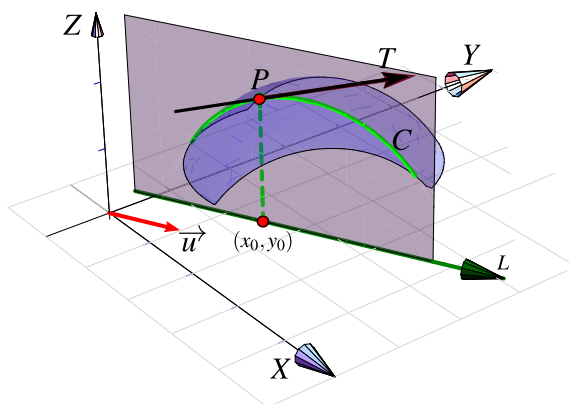


**Figura 3.9:**  $\nabla G(P)$  (traslación) es un vector perpendicular a la superficie  $S$  en  $P$

### 3.10 Derivada direccional

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Suponga que deseamos calcular la tasa de cambio de  $z = f(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0)$  en la dirección de un vector unitario arbitrario  $\vec{u} = (a, b)$ , para esto consideremos la superficie  $S$  con ecuación  $z = f(x, y)$  (la gráfica de  $f$ ) y sea  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Entonces el punto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  pertenece a  $S$ . El plano vertical generado por la recta  $L$  que pasa por el punto  $(x_0, y_0, 0)$  en la dirección del vector  $\vec{u}$ , interseca a la superficie  $S$  en la curva  $C$ . La pendiente de la recta tangente  $T$  a la curva  $C$  en el punto  $P$  es la tasa de cambio de  $z$  en la dirección del vector  $\vec{u}$ .



**Figura 3.10:** Derivada direccional

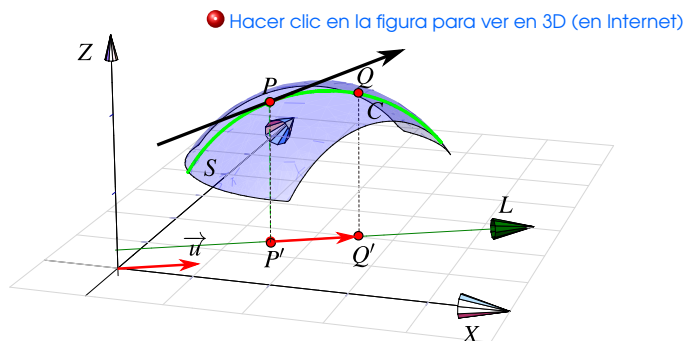
Sea  $Q = (x, y, z)$  otro punto sobre la curva  $C$ , y sean  $P' = (x_0, y_0)$  y  $Q' = P' + h\vec{u}$  las proyecciones ortogonales sobre el plano  $XY$  de los puntos  $P$  y  $Q$ , entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = Q' - P' = h\vec{u}$$

para algún escalar  $h$ . Así pues,

$$x - x_0 = ha \implies x = x_0 + ha$$

$$y - y_0 = hb \implies y = y_0 + hb$$



**Figura 3.11:**  $\|\overrightarrow{P'Q'}\| = h\|\vec{u}\|$

El cambio sobre recta  $L$  es  $\|\overrightarrow{P'Q'}\| = h\|\vec{u}\| = h$  ( $\vec{u}$  es unitario), por tanto la razón de cambio está dada por

$$\frac{\Delta z}{h\|\vec{u}\|} = \frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y al tomar el límite cuando  $h \rightarrow 0$  (siempre y cuando este límite exista) obtenemos la tasa de cambio instantánea de  $z$  (con respecto a la distancia) en la dirección de  $\vec{u}$ , la cual se llama **derivada direccional** de  $f$  en la dirección de  $\vec{u}$ .

**Definición 3.4 (Derivada direccional).**

Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar y sean  $(x_0, y_0) \in D$  y  $\vec{u} = (a, b)$  un vector *unitario*, entonces la derivada direccional de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  en la dirección del vector unitario  $\vec{u}$ , está dada por :

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

**Teorema 3.5 (Cálculo de la derivada direccional).**

Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar diferenciable en  $D$ , entonces  $f$  tiene derivada direccional en la dirección de cualquier vector no nulo  $\vec{u} = (a, b)$  y está dada por:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ &= f_x(x, y) \frac{a}{\|\vec{u}\|} + f_y(x, y) \frac{b}{\|\vec{u}\|} \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.29**

Calcule la derivada direccional  $D_{\vec{u}}f(x, y)$  si  $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$  y  $\vec{u} = (\sqrt{3}, 1)$ . Calcule  $D_{\vec{u}}f(1, 2)$ .

**Solución:**

- Evaluar el gradiente: Como  $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, -3x + 8y)$  entonces  $\nabla f(1, 2) = (-3, 13)$

- $\|\vec{u}\| = 2$

$$\bullet \text{ Cálculo: } \left\{ \begin{aligned} D_{\vec{u}}f(1, 2) &= \nabla f(1, 2) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ &= (-3, 13) \cdot \frac{(\sqrt{3}, 1)}{2} \\ &= -3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 13 \frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

**Ejemplo 3.30**

Calcule la derivada direccional de  $f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(yz)$ , en el punto  $P = (1, 3, 0)$  en la dirección del vector  $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ .

**Solución:**

- El vector gradiente de la función  $f$  esta dado por

$$\nabla f(x, y, z) = (\operatorname{sen}(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$$

evaluando en  $P$  tenemos que  $\nabla f(1, 3, 0) = (0, 0, 3)$ .

- Por otro lado, como  $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$ , un vector unitario en la dirección de  $\vec{u}$  es

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{i} + \frac{2}{\sqrt{6}} \hat{j} - \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{k} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

- Cálculo:  $D_{\vec{u}} f(1, 3, 0) = \nabla f(1, 3, 0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (0, 0, 3) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\frac{3}{\sqrt{6}}$

**Componente.** Recordemos que la componente de  $\vec{v}$  en la dirección de  $\vec{u}$  es  $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|}$ , esta componente es la longitud de la proyección vectorial de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$  ( $\operatorname{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ ). Con lo cual, la fórmula

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

nos dice que la derivada direccional es la componente del vector gradiente  $\nabla f(P)$  en la dirección del vector  $\vec{u}$

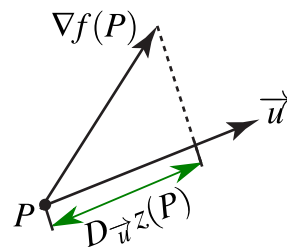


Figura 3.12

**Dirección de máximo y mínimo cambio.** Suponga que tenemos una función  $f$  de dos o de tres variables y consideramos todas las posibles derivadas direccionales de  $f$  en un punto  $P$  dado. Esto proporciona las tasas de cambio de  $f$  en todas las posibles direcciones. De modo que podemos plantear la siguiente pregunta: ¿En cuál de estas direcciones  $f$  cambia con mayor velocidad?, y ¿cuál es la máxima razón de cambio?.

Intuitivamente, de acuerdo a la figura 3.12, la derivada direccional en  $P$  aumenta conforme el vector  $\vec{u}$  se acerca al gradiente.



Las respuestas a estas preguntas las da el siguiente teorema.

**Teorema 3.6 (Dirección de máximo cambio).**

Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar. El valor máximo de la derivada direccional  $D_{\vec{u}}f$  en  $(x, y)$  es  $\|\nabla f(x, y)\|$  y se presenta cuando el vector no nulo  $\vec{u}$  tiene la misma dirección que el vector gradiente  $\nabla f(x, y)$ .

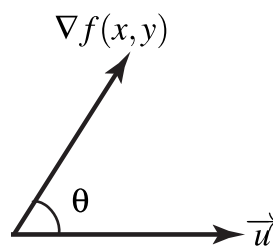
Podemos justificar esto, informalmente, de la manera que sigue. Primero recordemos que si  $\theta = \angle u, v$  entonces  $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\theta)$ . Ahora

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos \theta. \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector unitario  $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$  y el vector  $\nabla f(x, y)$ .

El valor de  $D_{\vec{u}}f(x, y)$  aumenta o disminuye solo si  $\cos \theta$  cambia (si giramos el vector  $\vec{u}$ ).

Así que el máximo valor se obtiene cuando  $\cos \theta = 1$  (es decir  $\theta = 0$ ). Por tanto  $D_{\vec{u}}f(x, y)$  es máxima cuando  $\theta = 0$  y en ese caso  $\vec{u}$  y  $\nabla f(x, y)$  son paralelos.



**Figura 3.13**

**Valor mínimo:** El valor mínimo de la derivada direccional en  $(x, y)$  es  $-\|\nabla f(x, y)\|$  y ocurre cuando  $\vec{u}$  tiene la misma dirección  $-\nabla f(x, y)$ .

**Observación:**  $f$  se mantiene constante sobre las curvas de nivel; la dirección (un vector  $\vec{u}$ ) en la que el cambio (instantáneo) de  $f$  respecto a  $P$  es nulo es la dirección de un vector perpendicular a  $\nabla f(P)$ . Que la derivada direccional se anule en  $P$  en la dirección de  $\vec{u}$  no significa, por supuesto que en esta dirección la función se mantenga constante (esto solo pasa sobre las curvas de nivel) excepto que la curva de nivel sea una recta.

**Ejemplo 3.31**

Suponga que la temperatura en un punto  $(x, y, z)$  en el espacio está dada por

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

donde  $T$  está medida en grados centígrados y  $x, y, z$  están en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura respecto al punto  $(1, 1, -2)$ ? ¿Cuál es la máxima tasa de incremento?

**Solución:** El gradiente de  $T$  es

$$\nabla T(x, y, z) = -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \hat{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \hat{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2} \hat{k}$$

Evaluando en el punto  $P = (1, 1, -2)$  obtenemos  $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8} (-\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$

Por tanto, la temperatura se incrementa con mayor rapidez en la dirección del vector gradiente

$$\vec{v} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

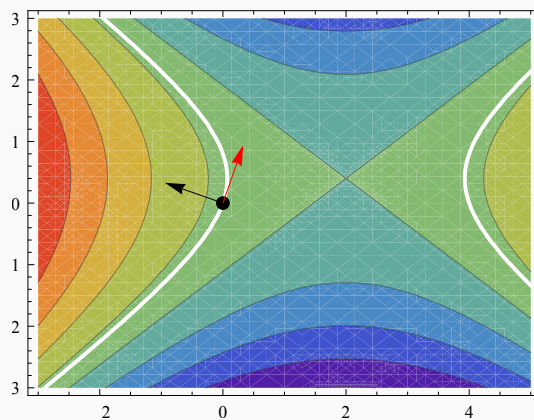
La tasa máxima de incremento es la longitud del vector gradiente  $\|\nabla T(1, 1, -2)\| = \frac{5}{8} \|-\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}\| = \frac{5\sqrt{41}}{8}$

**Ejemplo 3.32**

Considere la placa rectangular que se muestra en la figura de la derecha. Si la temperatura en un punto  $(x, y)$  de la placa está dada por

$$T(x, y) = 4(x - 2)^2 - 7(y - 0.4)^2$$

determine la dirección en la que debe de ir un insecto que está en el punto  $P = (0, 0)$ , para que se caliente lo más rápidamente. ¿Y qué debe hacer el insecto si desea ir por un camino en el que la temperatura se mantenga constante?



**Figura 3.14:** Mejor dirección, respecto a  $(4, 2)$ .

**Solución:**

La dirección en la que la temperatura aumenta más rápidamente respecto a  $P$  es la dirección del gradiente (vector negro en la figura):  $\nabla T(x, y) = (8(x-2), -14(y-0.4)) \Rightarrow \nabla T(0, 0) = (-16, 5.6)$

En cuanto a la otra pregunta, aunque la derivada direccional es nula en la dirección de un vector perpendicular al gradiente (vector rojo en la figura) esto solo dice que la razón de cambio instantáneo en esa dirección es cero. La trayectoria en la que la temperatura se mantiene constante es la curva de nivel  $T(x, y) = T(0, 0)$  (curvas blancas). Es por ahí donde debería caminar el insecto.

**Vector unitario tangente.**

Sea  $r: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si la función vectorial  $r$  es continua en  $I$ , entonces la gráfica de  $r$  se le llama *curva* y decimos que esta curva está descrita paramétricamente por  $r(t)$ .

**Parametrización de rectas y elipses.**

**Rectas en  $\mathbb{R}^3$ .** Si la recta  $L$  pasa por  $P$  en dirección de  $\vec{u}$  entonces  $r(t) = P + t\vec{u}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Elipse.** Consideremos la elipse  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ . Una parametrización es

$$r(t) = (h + a \cos(t)) \hat{i} + (k + b \sin(t)) \hat{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

**Derivada de  $r(t)$** 

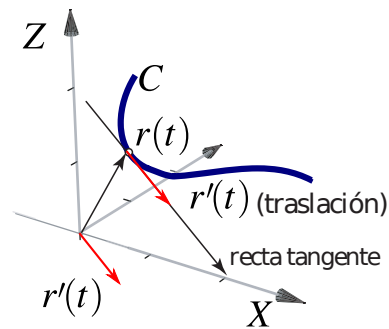
La derivada de  $r$  (si existe) es  $r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$ .

a.) Si  $x(t)$  y  $y(t)$  son funciones derivables en  $I$  y si  $r(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j}$ , entonces

$$r'(t) = x'(t) \hat{i} + y'(t) \hat{j}.$$

b.) Si  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  son funciones derivables en  $I$  y si  $r(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$  entonces

$$r'(t) = x'(t) \hat{i} + y'(t) \hat{j} + z'(t) \hat{k}.$$



**Figura 3.15:**  $r(t)$  parametriza a  $C$ . Vector tangente  $r'(t)$ .

La interpretación geométrica de  $r'(t)$  sugiere la siguiente definición

### Definición 3.5

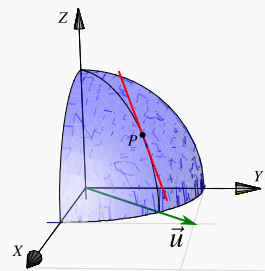
Sea  $C$  una curva descrita por la función vectorial continua  $r(t)$ ,  $t \in I$ . Si existe la derivada  $r'(t)$  y no es nula, la recta que pasa por  $r(t)$  y es paralela a  $r'(t)$  se llama tangente a  $C$  en  $r(t)$ . El vector  $r'(t)$  se denomina vector tangente a  $C$  en  $r(t)$ . El vector unitario tangente  $T$  es una función vectorial asociada a la curva  $C$  y se define como

$$\vec{T}(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}, \quad \text{si } \|r'(t)\| \neq 0$$

### Ejemplo 3.33

- La pendiente de la recta tangente en  $P$  en la dirección de  $\vec{u} = (1, 1)$  es

$$D_{(1,1)} z(P) = \nabla z(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

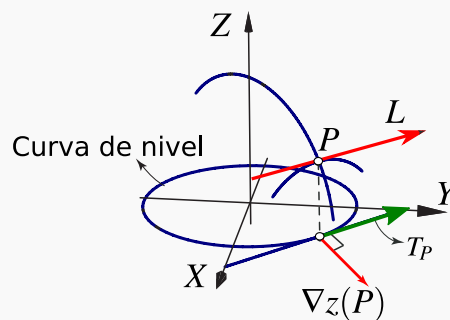


- El gradiente  $\nabla z(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel  $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$  en  $P$ . La derivada direccional en la dirección del vector unitario tangente es cero. Geométricamente, la recta  $L$ , en la figura que sigue, tiene pendiente cero.

Esto es así pues si  $\vec{T}_P$  es el vector unitario tangente a la curva de nivel  $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$  en  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ , entonces

$$\begin{aligned} D_{\vec{T}_P} f(P) &= \nabla f(P) \cdot \vec{T}_P = 0 \quad (\text{¿por qué?}) \\ &= \|\nabla f(P)\| \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

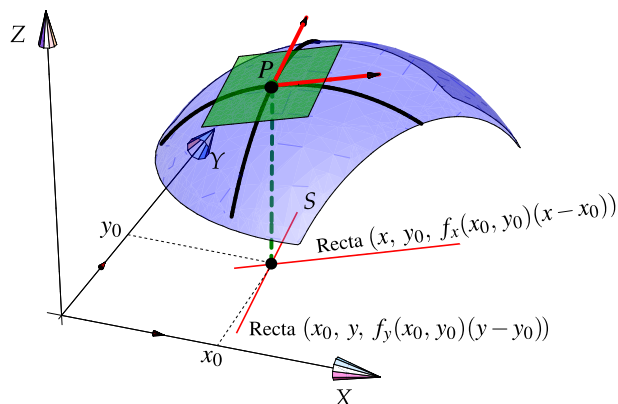
lo cual implica que  $\theta = \pi/2$ .



## 3.11 Plano tangente y el vector normal.

Si  $f$  es diferenciable, entonces el plano tangente a  $z = f(x, y)$  en  $P = (x_0, y_0, z(x_0, y_0))$  tiene ecuación

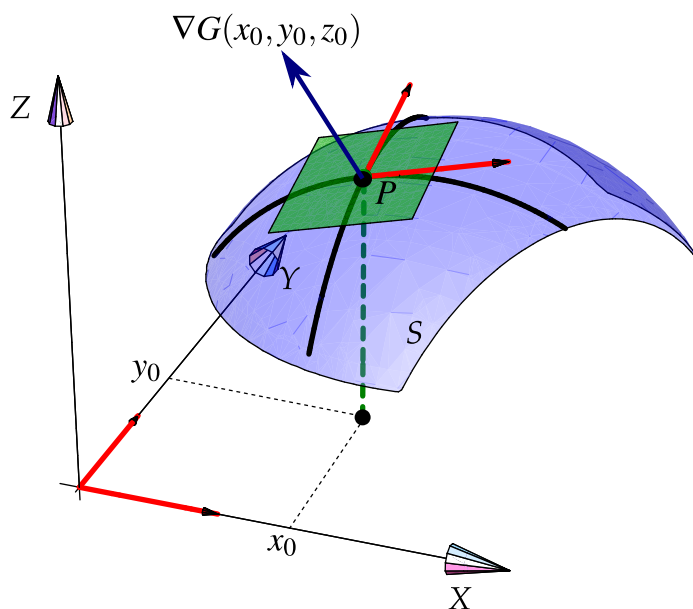
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0$$



**Figura 3.16:** Plano tangente a  $z = f(x, y)$  en  $P$  si  $f$  es diferenciable.

**Caso general.** Podemos obtener la ecuación cartesiana del plano tangente (si existe) usando un vector normal a la superficie  $S : G(x, y, z) = 0$ . Si  $G$  es derivable con continuidad en  $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$  y si el gradiente en  $P$  es no nulo, los vectores tangentes a cada curva en  $S$  que pasan por  $P$  están en el *plano tangente* a esta superficie en  $P$  y  $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$  es un vector normal a este plano.

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 3.17:**  $\nabla G(P)$  es perpendicular al plano tangente a  $S$  en  $P$ .

Así, una ecuación del plano tangente en  $P$  es

$$ax + by + cz = d \quad \text{con} \quad (a, b, c) = \nabla G(x_0, y_0, z_0) \quad \text{y} \quad d = \nabla G(x_0, y_0, z_0) \cdot P.$$

### (Plano Tangente)

- Si  $S$  tiene ecuación  $z = f(x, y)$  con  $f$  diferenciable, el plano tangente en  $P \in S$  tiene ecuación cartesiana

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0$$

- Si la superficie  $S$  tiene ecuación  $G(x, y, z) = 0$  con  $G$  diferenciable, el plano tangente en  $P \in S$  tiene ecuación cartesiana

$$G_x(P)x + G_y(P)y + G_z(P)z = \nabla G(P) \cdot P$$

### (Vector normal)

No hay un solo vector normal, aunque todos tienen la misma dirección, el tamaño puede variar.

- Si  $S$  tiene ecuación  $z = z(x, y)$  entonces si ponemos  $G(x, y, z) = z - z(x, y)$ , un vector normal es

$$N = (-z_x, -z_y, 1)$$

- Si  $S$  está definida de manera implícita por  $G(x, y, z) = 0$ , entonces un vector normal es

$$N_1 = (G_x, G_y, G_z) \quad \text{o también} \quad N_2 = \left( \frac{G_x}{G_z}, \frac{G_y}{G_z}, 1 \right) = \frac{1}{G_z} (G_x, G_y, G_z) \quad \text{si } G_z \neq 0.$$

### Ejemplo 3.34

Sea  $S$  la superficie de ecuación  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , si  $(x, y) \neq (0, 0)$  y  $f(0, 0) = 0$ . Aunque  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , no hay plano tangente pues la función es discontinua en este punto (aunque esté definida).

### Ejemplo 3.35

Sea  $S$  la superficie de ecuación  $z = x^2 + 2y^2$ . Obtener una ecuación cartesiana del plano tangente a  $S$  en  $P = (1, 1, 3)$ .

**Solución:**

**Primera manera.** En este caso  $f_x(x, y) = 2x$  y  $f_y(x, y) = 4y$ . Entonces una ecuación cartesiana sería,

$$f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) = z - 3,$$

es decir,

$$2(x - 1) + 4(y - 1) = z - 3,$$

**Otra manera.** Sea  $S: G(x, y, z) = z - x^2 - 2y^2 = 0$ . Entonces un vector normal al plano tangente a  $S$  en  $P$  es  $\nabla G = (-2x, -4y, 1)$ . Ahora,  $\nabla G(1, 1, 3) = (-2, -4, 1)$ , entonces una ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} -2x - 4y + 1z &= \nabla G(1, 1, 3) \cdot P \\ &= -3 \end{aligned}$$

### Ejemplo 3.36

Consideremos la superficie  $S$  de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Sea  $P = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in S$ . Calculemos la ecuación cartesiana del plano tangente en  $P$ .

- La ecuación de  $S$  es  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ .
- $\nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ .
- $N = \nabla G(P) = (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$  y  $d = P \cdot \nabla G(P) = 2$
- Una ecuación cartesiana del plano tangente:  $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{2}{\sqrt{3}}z = 2$  o también  $x + y + z = \sqrt{3}$ .

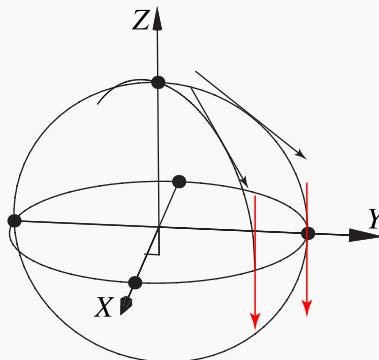
### Ejemplo 3.37

Consideremos la superficie  $S$  de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . y  $P = (0, 1, 0) \in S$ . Calcule la ecuación del plano tangente a  $S$  en  $P$ .

**Solución:** Sea  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Entonces  $\nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ . Por tanto un vector normal es  $N = G(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$

La ecuación cartesiana del plano tangente a  $S$  en  $P$  es  $0 \cdot x + 2 \cdot y + 0 \cdot z = 2$ , es decir  $y = 1$ .

Observe que en este punto, como  $\nabla z(x, y) = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{x}{z}\right)$ , la derivada direccional no existe.



### Ejemplo 3.38

Consideremos la superficie  $S$  de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Encuentre los puntos  $Q = (a, b, c) \in S$  tal que el plano tangente en  $Q$  sea paralelo al plano  $2x - y + 3z = 1$ .

**Solución:**  $Q$  tiene tres incógnitas así que necesitamos, en principio, tres ecuaciones.

- Como  $Q \in S$ , esto nos da una ecuación:  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .
- Como el plano tangente en  $Q$  es paralelo al plano  $2x - y + 3z = 1$ , sus vectores normales deben ser paralelos, es decir

$$\nabla G(Q) = \lambda (2, -1, 3)$$

esto nos da tres ecuaciones adicionales y una incógnita más,  $\lambda$ .

- Para encontrar  $Q$  solo debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \nabla G(Q) = \lambda (2, -1, 3) \end{cases}$$

es decir,



$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ (2a, 2b, 2c) = \lambda(2, -1, 3) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ 2a = 2\lambda \\ 2b = -\lambda \\ 2c = 3\lambda \end{array} \right.$$

Resolviendo, obtenemos las dos soluciones

$$Q = \left( -\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}} \right), \lambda = -\sqrt{2/7} \quad \text{y} \quad Q = \left( \frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right), \lambda = \sqrt{2/7}$$

## 13

## Ejercicios

**3.42** Sea  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  la ecuación de una superficie  $S$ .

- Calcule  $D_{\vec{u}}f(Q)$  si  $\vec{u} = (-2, 1)$  y  $Q = (1, 1, 2)$  es un punto en la superficie.
- Determine el punto  $P = (a, b, c) \in S$  para el cual la derivada direccional de  $f$  en  $P$  es  $\sqrt{2}$  en dirección de  $\vec{u} = (-2, 1)$  y  $\sqrt{5}$  en la dirección de  $\vec{v} = (1, 1)$ .
- Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente a  $S$  en el punto  $R = (1, -1, 2) \in S$ .
- Determine un vector  $\vec{u}$  para el cual la derivada direccional en  $R = (1, -1, 2) \in S$  es máxima y calcule su valor.

**3.43** Sea  $x^2 + xyz + z^3 = 1$  la ecuación de una superficie  $S$ .

- Calcule  $D_{\vec{u}}z(Q)$  si  $u = (-2, 1)$  y  $Q = (1, 2, 0) \in S$
- Determine  $b \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que en  $P = (1, b, 0) \in S$  y  $D_{\vec{u}}z(P) = \sqrt{2}$ .
- Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente a  $S$  en el punto  $R = (1, -1, 1) \in S$ .
- Determine un vector  $\vec{u}$  para el cual la derivada direccional en  $R = (1, -1, 1) \in S$  es mínima y calcule su valor.

**3.44** Considere la superficie  $S$  de ecuación  $z^3 + xz + y = 1$ .  $P = (1, 1, 0) \in S$

- Calcule  $D_{\vec{u}}z(P)$  donde  $\vec{u} = (1, -2)$

b.) ¿Cuál es el máximo valor que podría alcanzar la derivada direccional en  $\mathbf{P}$  y en cuál dirección  $\vec{v}$  se alcanza?

c.) Calcule la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto  $\mathbf{P}$

**3.45** Considere la superficie  $S$  de ecuación  $xyz^2 = 8z$ .  $\mathbf{P} = (1, 1, 8) \in S$

a.) Calcule  $D_{\vec{u}}z(\mathbf{P})$  donde  $\vec{u} = (-5, \sqrt{2})$

b.) ¿Cuál es el máximo valor que podría alcanzar la derivada direccional en  $\mathbf{P}$  y en cuál dirección  $\vec{v}$  se alcanza?

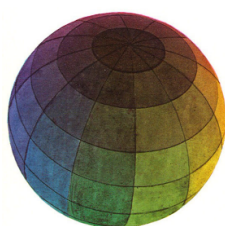
c.) Calcule la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto  $\mathbf{P}$

**3.46** Calcule la ecuación vectorial de la recta normal a la superficie  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  en el punto  $P = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$

**3.47** Considere la superficie  $S$  de ecuación  $e^{xz} + xy = yz + 1$ . Sea  $P = (0, 1, 0) \in S$ .

a.) Calcule la derivada direccional de  $z$  en  $P$  en la dirección del vector  $u = (1, 2)$ .

b.) Calcule la ecuación del plano tangente a  $S$  en  $P$ .



Versión actualizada de este libro:  
<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/>



## Introducción

Máximos y mínimos locales en varias variables.

Puntos críticos y extremos locales

Clasificación de puntos críticos

Clasificación de puntos críticos en el caso de dos variables.

Extremos con restricciones: Multiplicadores de Lagrange

(\*) Criterio de clasificación para puntos críticos en 3 variables o más.

(\*) Extremos globales. Condiciones de Kuhn-Tucker.

# 4 — Máximos y mínimos locales.

## 4.1 Introducción

¿Por qué, en una variable, un punto crítico  $\mathbf{p}$  es máximo local si  $f''(\mathbf{p}) < 0$ ?

En una variable, los puntos críticos de  $f$  son los puntos  $x = \mathbf{p}$  en los que  $f'(\mathbf{p}) = 0$  (o en los que  $f'$  se indefine). Muchas veces se puede clasificar este punto crítico con el signo de  $f''(\mathbf{p})$ . Esto se puede establecer usando polinomios de Taylor. Según el teorema de Taylor, en los alrededores de  $x = \mathbf{p}$ ,

$$f(\mathbf{p} + h) = f(\mathbf{p}) + f'(\mathbf{p})h + \frac{f''(\mathbf{p})}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\mathbf{p})}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad \text{con } \xi \text{ entre } \mathbf{p} \text{ y } h.$$

En particular, si  $x = \mathbf{p}$  es un punto crítico de  $f$ ,

$$f(\mathbf{p} + h) - f(\mathbf{p}) = \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \quad \text{con } \xi \text{ entre } \mathbf{p} \text{ y } h.$$

Si  $f''$  es continua y  $f''(\mathbf{p}) \neq 0$ , entonces hay un entorno alrededor de  $\mathbf{p}$  donde  $f''$  conserva el signo. Si  $h$  es suficientemente pequeño,  $\mathbf{p} + h$  está en este entorno y  $f''(\mathbf{p})$ ,  $f''(\xi)$  y por tanto  $f(\mathbf{p} + h) - f(\mathbf{p})$ , tienen todos el mismo signo; por esto el signo de  $f(\mathbf{p} + h) - f(\mathbf{p})$  es el signo de  $f''(\mathbf{p})$  si  $h$  es suficientemente pequeño.

Se concluye que si  $f''(\mathbf{p}) > 0$  entonces  $f(\mathbf{p} + h) > f(\mathbf{p})$  y en  $x = \mathbf{p}$   $f$  alcanza un mínimo local y si  $f''(\mathbf{p}) < 0$  entonces  $f(\mathbf{p} + h) < f(\mathbf{p})$  y en  $x = \mathbf{p}$   $f$  alcanza un máximo local.

**Interpretación geométrica.** Observe que el signo de  $f''(\mathbf{p}) \neq 0$  decide la concavidad del polinomio de Taylor

$$T_2(x) = f(\mathbf{p}) + f'(\mathbf{p})(x - h) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - h)^2.$$

Y esta concavidad coincide con la naturaleza del punto crítico.

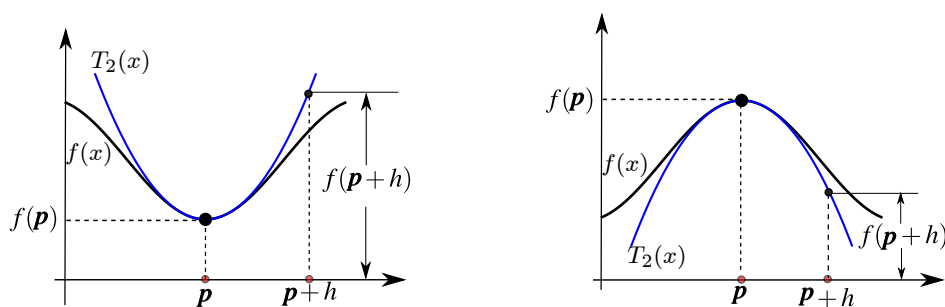


Figura 4.1: El signo de  $f''(p)$  se usa para clasificar puntos críticos.

## 4.2 Máximos y mínimos locales en varias variables.

Como en cálculo en una variable, los extremos *locales* de una función de varias variables son puntos donde la función alcanza un máximo o un mínimo en un entorno del dominio de la función. Si la función está definida en una región  $D$ , los extremos *globales* son los puntos donde la función toma valores máximos o mínimos y esto podría suceder en cualquier parte de la región en consideración. Recordemos que un entorno abierto alrededor de  $p \in \mathbb{R}^n$  de radio  $\delta$  es el conjunto  $D_\delta(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < \delta\}$  (discos sin borde en  $\mathbb{R}^2$  y el interior de esferas en  $\mathbb{R}^3$ ).

### Definición 4.1 (Extremos locales).

Sea  $f$  función de  $n$  variables,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  tiene un máximo local en  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  si existe un entorno abierto  $D_\delta(p)$  tal que  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(p)$  para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_\delta(p)$ . El punto  $(p_1, p_2, \dots, p_n, f(p))$  se dice un máximo local de  $f$  y el número  $f(p)$  es el máximo de  $f$  en el entorno  $D_\delta(p)$ .

$f$  tiene un mínimo local en  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  si existe un entorno abierto  $D_\delta(p)$  tal que  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(p)$  para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_\delta(p)$ . El punto  $(p_1, p_2, \dots, p_n, f(p))$  se dice un mínimo local de  $f$  y el número  $f(p)$  es el mínimo de  $f$  en el entorno  $D_\delta(p)$ .

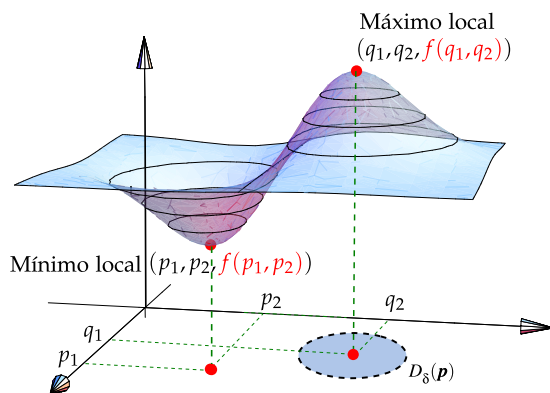


Figura 4.2: Máximo y mínimo local.

Si las desigualdades de la definición anterior se cumplen para todos los puntos en el dominio de  $f$ , entonces  $f$  tiene un máximo absoluto (o mínimo absoluto) en  $\mathbf{p}$ .

### 4.3 Puntos críticos y extremos locales

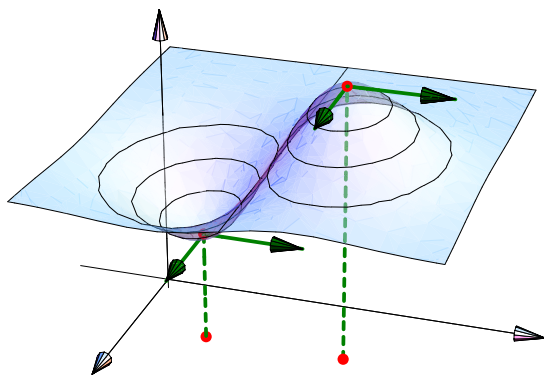
Sea  $f$  continua. Un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  es un **punto crítico** de  $f$  si  $Df(\mathbf{p}) = 0$  (o si  $Df$  no está definida en este punto), es decir, si  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Un punto crítico que no es ni máximo ni mínimo local se llama *punto de silla*.

Como en cálculo en una variable, los extremos locales son puntos críticos, es decir, en el caso de que  $f$  sea diferenciable, la derivada de  $f$  se anula en los puntos críticos.

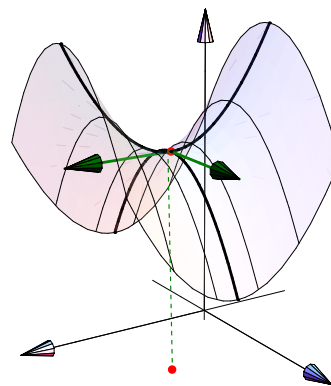
#### Teorema 4.1

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, si  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  es un extremo local de  $f$  entonces  $Df(\mathbf{p}) = 0$ , es decir,  $\mathbf{p}$  es punto crítico de  $f$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 4.3:** En los extremos locales las derivadas parciales se anulan



**Figura 4.4:** En los puntos de silla las derivadas parciales se anulan

### 4.4 Clasificación de puntos críticos

La fórmula de Taylor *de segundo orden* en  $n$  variables dice que si  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es diferenciable en  $\mathbf{x} \in U$ , entonces si  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ , existe  $0 < \xi < 1$  tal que

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + R_1(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \quad \text{con} \quad R_1(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} + \xi \mathbf{h}).$$

Si definimos  $D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$ , entonces  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} + \xi \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{x} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T$ .

Así, la fórmula de Taylor de segundo orden se puede escribir como,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^T + \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{x} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T, \quad 0 < \xi < 1.$$

La *Hessiana*<sup>1</sup> de  $f$  en  $\mathbf{x}$  es la forma cuadrática  $\frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^T$ .

Evaluando en un punto crítico  $\mathbf{p}$ ,  $Df(\mathbf{p}) = 0$  y la fórmula de Taylor de *segundo orden* queda

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) = \mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T, \quad 0 < \xi < 1.$$

El signo de la resta  $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$  es el signo de  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T$ . Si las derivadas  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  son continuas en un vecindario de  $\mathbf{p}$ , entonces  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  conserva el signo en un entorno de este punto, así  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p} + \xi \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T$  tiene el mismo signo que  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  si  $\mathbf{h}$  es suficientemente pequeño y por tanto, el signo de  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  (siempre y cuando no se anule) decide si en  $\mathbf{p}$  la función  $f$  alcanza un máximo o un mínimo local.

Pero  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  depende de  $\mathbf{h}$ . Para establecer si  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  es positiva o negativa para todos los valores de  $\mathbf{h}$  en un entorno, se usa la teoría de formas cuadráticas.

**Matriz definida positiva y matriz definida negativa.** Una forma cuadrática  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(\mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot A_{n \times n} \cdot \mathbf{h}^T$ , es *definida positiva* si  $g(\mathbf{h}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  y  $g(\mathbf{h}) = 0$  solo si  $\mathbf{h} = 0$ . Similarmente,  $g$  es *definida negativa* si  $g(\mathbf{h}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  y  $g(\mathbf{h}) = 0$  solo si  $\mathbf{h} = 0$ .

Del álgebra lineal se sabe que si  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ,  $D_1 = a_{11}$ ,  $D_2 = \text{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots, D_n = \text{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , entonces

•  $\mathbf{h} \cdot A_{n \times n} \cdot \mathbf{h}^T$  es definitiva positiva si  $D_i > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$

•  $\mathbf{h} \cdot A_{n \times n} \cdot \mathbf{h}^T$  es definitiva negativa si  $\text{sgn}(D_i) = (-1)^i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$

**Test de clasificación.** En varias variables la clasificación de un punto crítico  $\mathbf{p}$  se puede establecer si  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  es definida positiva o definida negativa. Esto se hace calculando  $D_1, D_2$ , etc.

<sup>1</sup>En honor a Ludwing Otto Hesse (1811 – 1874).



**Teorema 4.2 (Condición suficiente).**

Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^3$  y  $\mathbf{p} \in U$  un punto crítico de  $f$ . Si  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  es definida positiva, entonces  $\mathbf{p}$  es un mínimo relativo de  $f$ . Similarmente, si  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  es definida negativa, entonces  $\mathbf{p}$  es un máximo relativo de  $f$ .

En la demostración de este teorema se establece que si  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  es definida positiva entonces en la fórmula de Taylor obtenemos  $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) > 0$  en un entorno de  $\mathbf{p}$ , es decir  $f(\mathbf{p})$  es un valor mínimo local. Similarmente, si  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  es definida negativa entonces en la fórmula de Taylor obtenemos  $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) < 0$  en un entorno de  $\mathbf{p}$ , es decir  $f(\mathbf{p})$  es un valor máximo local. Si  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  no es ni definida positiva ni definida negativa, entonces tenemos un punto de silla.

**4.5 Clasificación de puntos críticos en el caso de dos variables.**

De acuerdo a lo que hemos establecido en la sección anterior, en el caso de dos variables es sencillo determinar si  $\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T$  es definida positiva o definida negativa. En este caso,

$$\mathbf{h} \cdot D^2 f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}^T = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(\mathbf{p}) & f_{xy}(\mathbf{p}) \\ f_{yx}(\mathbf{p}) & f_{yy}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Si  $f$  tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, las derivadas mixtas son iguales y entonces  $D_1(\mathbf{p}) = f_{xx}(\mathbf{p})$  y  $D_2 = f_{xx}(\mathbf{p}) \cdot f_{yy}(\mathbf{p}) - [f_{xy}(\mathbf{p})]^2$ . En este caso a veces se usa  $f_{xx}(\mathbf{p})$  en vez de  $D_1$  y  $D_2(\mathbf{p})$  en vez de  $D_2$ .

**Teorema 4.3 (Condición suficiente).**

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^3$  en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $D_2(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$ . Si  $(x_0, y_0) \in U$  es punto crítico de  $f$ , entonces

- a.) si  $D_2(x_0, y_0) > 0$  y  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , entonces  $f$  alcanza un mínimo local en  $(x_0, y_0)$ .
- b.) si  $D_2(x_0, y_0) > 0$  y  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $f$  alcanza un máximo local en  $(x_0, y_0)$ .
- c.) Si  $D_2(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  es un punto de silla.

El teorema solo da condiciones suficientes: No nos dice algo si  $D_2(x_0, y_0) = 0$ . En este caso se podría usar otros métodos para clasificar. En este test, se puede usar  $f_{yy}$  en vez de  $f_{xx}$  pues si  $D_2(x_0, y_0) > 0$ , ambas tienen el mismo signo.

**Ejemplo 4.1**

Calcule y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ .

**Solución:**

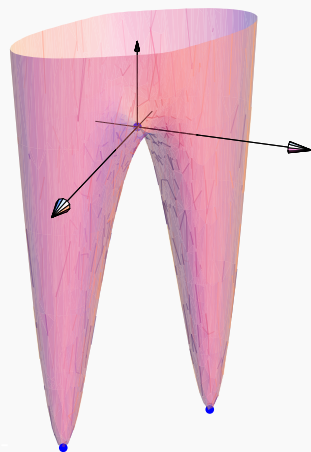
**Puntos críticos:** 
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4y - 4x = 0 \\ 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{cases} \quad (E2)$$

Sumando miembro a miembro obtenemos  $x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y$ . Ahora sustituimos en la ecuación (E2), queda  $4x^3 - 4x - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0$ ; con lo cual obtenemos los puntos críticos  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

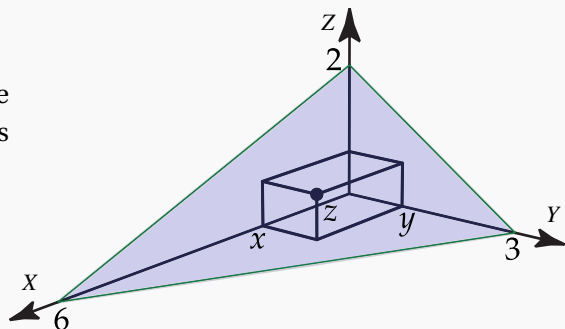
**Clasificación.**  $D_2(x, y) = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - (4)^2$

$(x_0, y_0)$	$D_1 = f_{xx}(x_0, y_0)$	$D_2 = D_2(x_0, y_0)$	Clasificación
$(0, 0)$	-4	0	Criterio no decide.
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	20	384	$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -8)$ es mínimo local.
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	20	384	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -8)$ es mínimo local.

La representación gráfica de  $f$  se muestra en la figura. Aunque  $D_2(0, 0) = 0$  y el criterio no proporciona información, la gráfica a la derecha nos indica que se trata de un punto de silla.

**Ejemplo 4.2**

Calcule el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano  $x + 2y + 3z = 6$ .



**Solución:** Como  $z = (2 - x/3 - 2y/3)$ , el volumen de la caja es  $V = xy(2 - x/3 - 2y/3)$ .

**Puntos críticos.** Nos interesa solo  $x > 0$  y  $y > 0$ . Entonces,

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2y}{3}(-3+x+y) = 0 \\ -\frac{x}{3}(-6+x+4y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+x+y = 0 \\ -6+x+4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=1.$$

**Clasificación.**  $D_2 = D_2(x, y) = V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 = -\frac{2y}{3} \cdot -\frac{4x}{3} - \left[\frac{2}{3}(x+2y-3)\right]^2$ . Así  $D_2(2, 1) = 4/3 > 0$  y  $D_1 = V_{xx}(2, 1) = -2/3 < 0$ . Esto nos dice que el volumen es máximo cuando las dimensiones de la caja son  $x = 2$ ,  $y = 1$  y  $z = \frac{2}{3}$ . Por otro lado, el volumen máximo es  $\frac{4}{3}u^3$ .

### Ejemplo 4.3

Sea  $f(x, y) = 6xy - 2x^2y - 3xy^2$ . Calcule y clasifique los puntos críticos de  $f$ .

**Solución:** Los **puntos críticos** se obtienen resolviendo el sistema  $\nabla f = (0, 0)$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y - 4xy - 3y^2 = 0 \\ 6x - 2x^2 - 6xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(6 - 4x - 3y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ o } y = \frac{6-4x}{3} \\ 6x - 2x^2 - 6xy = 0 \end{cases} \quad (\text{E2})$$

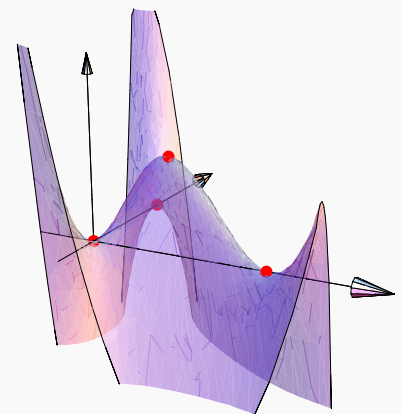
● Si  $y = 0$ , al sustituir en la ecuación (E2) obtenemos los puntos críticos  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ .

● Si  $y = \frac{6-4x}{3}$ , al sustituir en la ecuación (E2) obtenemos los puntos críticos  $(0, 2)$ ,  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ .

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Clasificación.**  $D_2(x, y) = (-4y)(-6x) - [6 - 4x - 6y]^2$

$(x_0, y_0)$	$D_1 = f_{xx}(x_0, y_0)$	$D_2 = D_2(x_0, y_0)$	Clasificación
$(0, 0)$	0	-36	$(0, 0, 0)$ es punto de silla
$(3, 0)$	0	-36	$(3, 0, 0)$ es punto de silla
$(0, 2)$	-8	-36	$(0, 2, 0)$ es punto de silla
$(1, 2/3)$	-8/3	12	$(1, 2/3, 4/3)$ es máximo local.



**Ejemplo 4.4**

Sea  $z = yxe^{-x} + y^2$ . Calcule y clasifique los puntos críticos de  $z$ .

**Solución:** Los **puntos críticos** se obtienen resolviendo el sistema  $\nabla z = (0, 0)$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}y - e^{-x}xy = 0 \\ e^{-x}x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-x) = 0 \Rightarrow y=0 \text{ o } x=1 \\ e^{-x}x + 2y = 0 \end{cases} \quad (\text{E2})$$

**I caso.** Si  $y = 0$ , sustituimos en (E2) y obtenemos  $x = 0$ .

**II caso** Si  $x = 1$  sustituimos en (E2) y obtenemos  $y = -\frac{1}{2e}$ .

**Clasificación.**  $D_2(x, y) = 2ye^{-x}(x-2) - (e^{-x} - e^{-x}x)^2$

$(x_0, y_0)$	$D_1 = f_{xx}(x_0, y_0)$	$D_2 = D_2(x_0, y_0)$	Clasificación
$(0, 0)$	0	$-1 < 0$	$(0, 0, 0)$ es punto de silla
$\left(1, -\frac{1}{2e}\right)$	$\frac{1}{2e^2} > 0$	$\frac{1}{e^2} > 0$	$(1, -1/2e, -1/4e^2)$ es mínimo local

**Ejemplo 4.5**

Sea  $z = x^2y^2 - x - y$ . Calcule y clasifique los puntos críticos de  $z$ .

**Solución:** Los **puntos críticos** se obtienen resolviendo el sistema  $\nabla z = (0, 0)$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy^2 - 1 = 0 \quad (\text{E1}) \\ 2x^2y - 1 = 0 \quad (\text{E2}) \end{cases}$$

Como  $y = 0$  no es solución, podemos despejar  $x = \frac{1}{2y^2}$  de (E1). Ahora sustituimos en (E2) y obtenemos  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ .

Entonces tenemos el punto crítico  $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$

**Clasificación.**  $D_2(x, y) = 2y^2 \cdot 2x^2 - (4xy)^2$

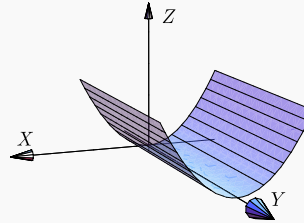
$(x_0, y_0)$	$D_1 = f_{xx}(x_0, y_0)$	$D_2 = D_2(x_0, y_0)$	Clasificación
$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$-3\sqrt[3]{4} < 0$	$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, -\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right)$ es punto de silla

**Ejemplo 4.6**

Calcule y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^2$ .

**Solución:** Primero calculamos los puntos críticos

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 0 = 0 \end{cases}$$



El sistema tiene infinitas soluciones de la forma  $(0, y)$ . Así que tenemos un número infinito de puntos críticos.  $D_2(x, y) = (2)(0) - (0)^2 = 0$  así que este criterio no da información aunque, de acuerdo a la gráfica, se trata de puntos donde  $f$  alcanza mínimos locales.

**14****Ejercicios**

**4.1** Calcule y clasifique los puntos críticos de la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ .

**4.2** Determine y clasifique los puntos críticos de  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ .

**4.3** Sea  $z = xy + \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$  la ecuación de una superficie (con  $a$  y  $b$  constantes). Si  $P = (1, 2)$  es un punto crítico de  $z$ , determine si en  $P$  la función *alcanza* un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

**4.4** Calcular y clasificar los puntos críticos de  $z = 4x^2 - xy + y^2$ .

**4.5** Calcule y clasifique los puntos críticos de  $z = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$ .

**4.6** Hallar el punto del paraboloide  $z = x^2 + y^2 + 2$  más cercano del punto  $P = (2, 2, 2)$ .

**4.7** Calcule y clasifique los puntos críticos de  $z = 4xy - 2x^2 - y^4$

**4.8** Cuales deben ser las dimensiones de un envase de forma rectangular, volumen de  $512 \text{ cm}^3$  y costo mínimo, si el material de los lados de la caja cuestan 10 colones el centímetro cuadrado y el material de la tapa y el fondo cuestan 20 colones el centímetro cuadrado.

**4.9** Calcule el volumen de la caja de base rectangular más grande, que tenga caras en los planos  $x = 0, y = 0, z = 0$ , en el primer octante, y un vértice en el plano  $x + 2y + 3z = 6$  (haga un dibujo).

**4.10** Resuelva el ejercicio anterior si el plano tiene ecuación  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ , con  $a, b, c$  números positivos.

**4.11** Encuentre las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen, si el área de su superficie total debe ser de  $64\text{cm}^2$

## 4.6 Extremos con restricciones: Multiplicadores de Lagrange

Supóngase que queremos hallar los máximos y los mínimos relativos de  $z = f(x, y)$  sujeto a la restricción  $g(x, y) = 0$ . Esto significa que la función  $f(x, y)$  solo podrá ser evaluada en los puntos  $(x, y)$  que estén en la curva de nivel  $g(x, y) = 0$ , es decir  $f(x, y)$  está restringida (o sujeta) a  $g(x, y) = 0$ . Una manera de resolver este problema se puede obtener con un análisis geométrico de la situación (figura 4.5). En las cercanías de un máximo local, nos desplazamos sobre  $g$  en la dirección de crecimiento de  $f$ , hasta el punto más profundo que puede alcanzarse sobre  $g$  en esta dirección. Este punto podría ser el máximo local con restricciones que andamos buscando. Digamos que es  $P = (a, b, c)$ . Para poder determinar este punto con una ecuación, podemos pensar que viajamos a “este punto más profundo” atravesando curvas de nivel, entonces la “última” curva de nivel debería ser una curva de nivel  $z = c$  tangente a  $g$  en  $P$  (si  $P$  no es un punto terminal de  $g$ ). Que estas curvas sean tangentes significa que sus gradientes son paralelos, es decir,  $\nabla z(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$ . Esta es la ecuación que usamos para determinar  $P$ .

El análisis es similar para determinar un mínimo local con restricciones: En las cercanías de un mínimo local, nos desplazamos sobre  $g$  en la dirección de decrecimiento hasta el punto más profundo que podamos alcanzar.

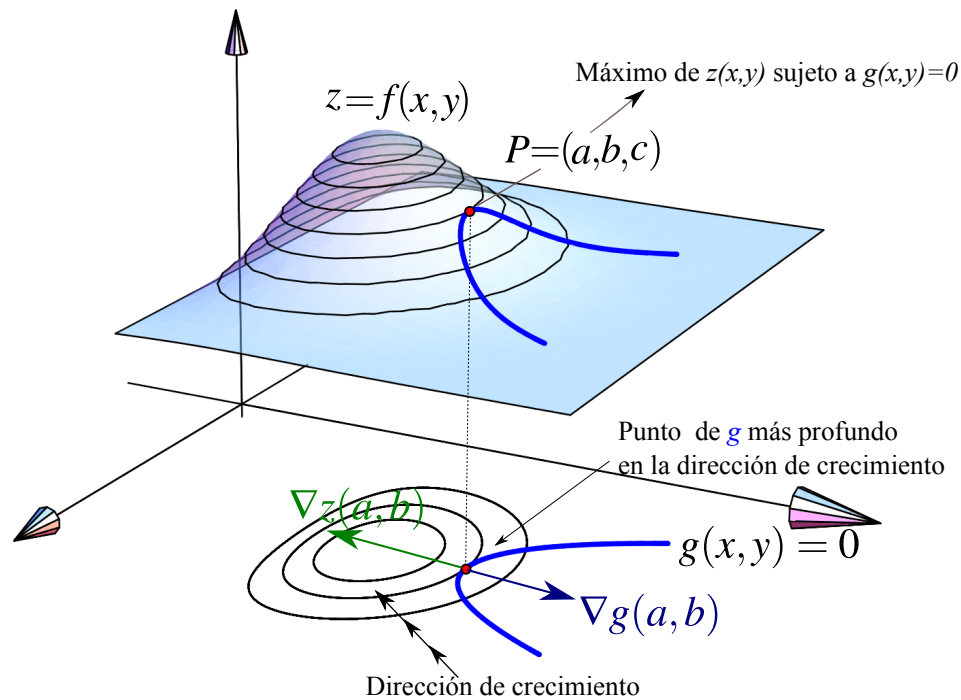
En resumen, para que  $(a, b, c)$  sea un extremo de  $f$  sujeto a la condición  $g(x, y) = 0$ , es *necesario* que se cumpla  $\nabla z(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$  y con  $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$ . La condición es necesaria pero no suficiente.

Esto nos dice que las soluciones del sistema  $\nabla z(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = 0$  nos dan posibles extremos locales.

Los extremos de  $z = f(x, y)$  restringida a  $g(x, y) = 0$  son los extremos de la función

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

A  $\lambda$  se le llama multiplicador (de Lagrange). Observe que  $\lambda$  podría ser cero. Esto pasa por ejemplo cuando un extremo local con restricciones coincide con un extremo local (sin restricciones). Sin embargo si se requiere que  $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$ .



**Figura 4.5:** Un problema de optimización con restricciones.

#### Método de los multiplicadores de Lagrange con una restricción:

- Para minimizar o maximizar  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sujeta a la condición  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , minimice o maximice  $L(x_1, y_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Para hallar los puntos críticos de  $L(x_1, y_1, \dots, x_n, \lambda)$  se debe resolver el sistema

$$\begin{cases} L_{x_1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ L_{x_n} & = & 0 \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \end{cases}$$

- **Criterio de clasificación.** Para determinar si los puntos críticos son máximos, mínimos o no son ni máximos ni mínimos, se podría recurrir a al criterio de la Hessiana orlada (ver más adelante). Sin embargo, en los problemas que siguen, los puntos críticos se pueden clasificar de manera directa (usando la geometría del problema o una comparación).

#### Ejemplo 4.7

Minimizar  $z = x^2 + y^2$  sujeto a  $x - y = 0$ .

**Solución:** Sea  $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x - y)$ .

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (\text{E3})$$

Sustituyendo  $x = \lambda/2$  y  $y = -\lambda/2$  en (E3) obtenemos  $\lambda = 0$  y, por tanto,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

En este caso,  $\lambda = 0$  indica que el mínimo con restricciones coincide con un mínimo local de  $z$ .

### Ejemplo 4.8

Determine tres números reales positivos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  cuya suma sea 10 y su producto máximo.

**Solución:** Hay que maximizar el producto  $P = xyz$  sujeto a la restricción  $x + y + z = 10$ .

Sea  $L(x, y, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z - 10)$ .

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - \lambda = 0 \\ xy - \lambda = 0 \\ x + y + z - 10 = 0 \end{cases} \quad (\text{E4})$$

Despejando  $\lambda$  obtenemos

$$yz = xz \quad \text{y} \quad xz = xy.$$

Como  $x$ ,  $y$  y  $z$  son, en este caso, positivos; podemos cancelar y entonces  $x = y = z$ . Sustituyendo en (E4) nos queda  $3x - 10 = 0$ , es decir,  $x = y = z = \frac{10}{3}$ .



**Ejemplo 4.9**

Encontrar el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sujeto a  $x^4 + y^4 = 1$

**Solución:** La lagrangiana es  $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^4 + y^4 - 1)$

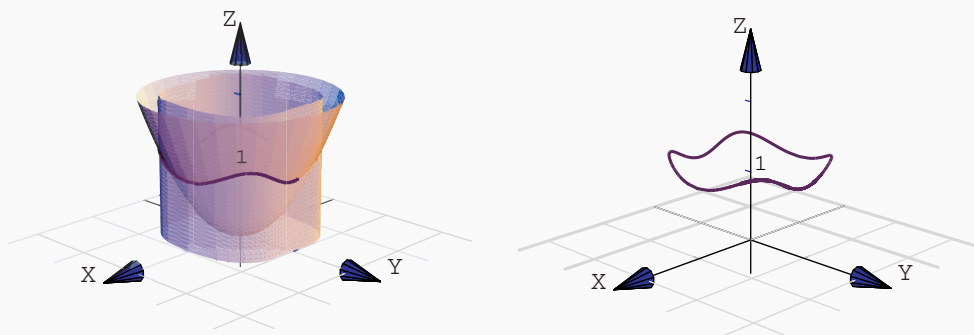
● **Puntos críticos:**

$$\begin{cases} L_x = 2x - 4\lambda x^3 = 0 \\ L_y = 2y - 4\lambda y^3 = 0 \\ L_\lambda = -x^4 - y^4 + 1 = 0 \text{ (E3)} \end{cases} \implies \begin{cases} 2x(1 - 2\lambda x^2) = 0 \\ 2y(1 - 2\lambda y^2) = 0 \\ -x^4 - y^4 + 1 = 0 \text{ (E3)} \end{cases}$$

Casos para anular las tres ecuaciones:

- Caso  $x = 0$  y  $y = 0$ . Al sustituir en (E3) obtenemos  $1 = 0$ . No obtenemos puntos críticos.
- Caso  $x = 0$  y  $1 - 2\lambda y^2 = 0$ . Al sustituir en (E3) obtenemos los puntos críticos  $(0, \pm 1)$  y  $\lambda = 1/2$ .
- Caso  $y = 0$  y  $1 - 2\lambda x^2 = 0$ . Al sustituir en (E3) obtenemos los puntos críticos  $(\pm 1, 0)$  y  $\lambda = 1/2$ .
- Caso  $1 - 2\lambda y^2 = 0$  y  $1 - 2\lambda x^2 = 0$ . Elevando al cuadrado obtenemos  $4\lambda^2 y^4 = 1$  y  $4\lambda^2 x^4 = 1$ . Multiplicando (E3) por  $4\lambda^2$  a ambos lados y sustituyendo, obtenemos los cuatro puntos críticos  $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}\right)$  y  $\lambda^2 = 1/2$ .

Para clasificar los puntos de manera “empírica”, podemos evaluar en la función  $f$ . Para visualizar la situación, dibujamos la curva de intersección entre la superficie  $z = x^2 + y^2$  y la superficie generada por la curva  $x^4 + y^4 = 1$ .



así, tenemos cuatro puntos máximos relativos,  $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$  y cuatro puntos mínimos relativos,  $(0, \pm 1, 1), (\pm 1, 0, 1)$

**Ejemplo 4.10**

Calcule el valor mínimo de la función  $f(x, y) = x^2 + (y-2)^2$  si  $(x, y)$  son puntos de la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ .

**Solución:** . El problema es minimizar la función objetivo  $f(x, y) = x^2 + (y-2)^2$  sujeto a la restricción  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ .

La lagrangiana es  $L(x, y, \lambda) = x^2 + (y-2)^2 - \lambda(x^2 - y^2 - 1)$

● **Puntos críticos:** Debemos resolver el sistema  $\nabla L = 0$ , es decir,

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2(y-2) + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 & \text{(E1)} \\ (y-2) + 2\lambda y = 0 & \text{(E2)} \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 & \text{(E3)} \end{cases}$$

De (E1) vemos que tenemos dos casos,  $x = 0$  y  $\lambda = 1$ .

El caso  $x = 0$  no es solución pues no satisface (E3).

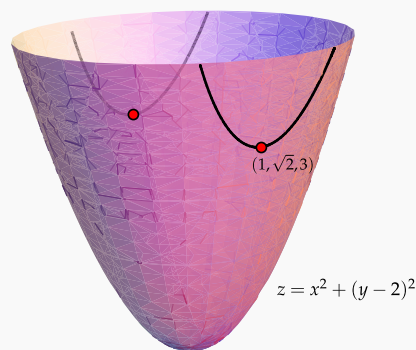
El caso  $\lambda = 1$  lo sustituimos en (E2) y obtenemos  $y = 1$  y este valor de  $y$  lo sustituimos en (E3) y obtenemos  $x = \pm\sqrt{2}$ . Este procedimiento nos garantiza que todas las ecuaciones se anularon y que son la solución del sistema.

Los puntos críticos son  $(1, \sqrt{2})$  y  $(1, -\sqrt{2})$ . Para determinar de manera empírica el mínimo, evaluamos estos puntos en  $f$ .

$$f(1, \sqrt{2}) = 3$$

$$f(1, -\sqrt{2}) = 3$$

En este caso, los dos puntos  $(1, \sqrt{2}, 3)$  y  $(1, -\sqrt{2}, 3)$  son mínimos locales.



**Figura 4.6:** Mínimos locales

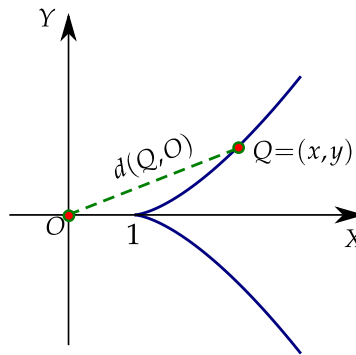
**Nota acerca de las hipótesis.** El método de multiplicadores de Lagrange requiere, entre otras cosas, que  $\nabla g$  no se anule en los puntos críticos.

Por ejemplo, si consideramos el problema de minimizar la distancia de la curva  $(x-1)^3 - y^2 = 0$  al origen, la lagrangiana sería  $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda[(x-1)^3 - y^2]$  y debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3\lambda(x-1)^2 = 0 & \text{(E1)} \\ 2y + 2y\lambda = 0 & \text{(E2)} \\ (x-1)^3 - y^2 = 0 & \text{(E3)} \end{cases}$$

Factorizando en (E2) obtenemos  $y = 0$  y  $\lambda = -1$ . Sustituyendo  $y = 0$  en (E3) nos da  $x = 1$ , pero este valor no es solución pues no satisface (E1). Sustituyendo  $\lambda = -1$  en (E1) nos da la cuadrática  $3x^2 - 4x + 3 = 0$  que tiene raíces complejas, así que el sistema no tiene soluciones en  $\mathbb{R}$ .

Sin embargo, el gráfico nos muestra que la solución es  $(1, 0)$ .



**Figura 4.7:** La distancia de la curva  $(x-1)^3 - y^2 = 0$  al origen se minimiza si  $x = 1$  y  $y = 0$ , pero  $(1, 0)$  no es punto crítico. El método de multiplicadores de Lagrange requiere que  $\nabla g(1, 0) \neq 0$  pero esto no ocurre.

El problema está en que  $\nabla g(1, 0) = (0, 0)$  mientras que  $\nabla f(1, 0) = 1$  así que no se da que  $\nabla f(1, 0) = \lambda \nabla g(1, 0)$ . Que  $\nabla g$  no se anule se requiere en la demostración del teorema de Lagrange pues se usa derivación implícita.

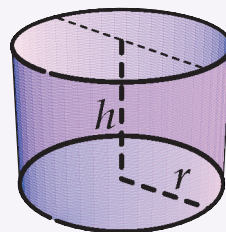
**Determinar extremos absolutos.** Si el conjunto de puntos  $A_g$  donde la restricción  $g$  se anula, es cerrado y acotado y si  $f$  es continua entonces si hay extremos absolutos en  $A_g$ . Formalmente uno obtiene los valores de la función en los puntos críticos y los compara con los valores de la función en la frontera de  $A_g$  y así obtiene los extremos absolutos.

Los puntos críticos los detectamos usando el método de multiplicadores de Lagrange, pero también a veces hay extremos excepcionales en  $A_g$  en los que el gradiente de  $f$  o el de  $g$  se indefinen o puntos donde el gradiente de  $g$  se anula como el ejemplo anterior.

# 15

## Ejercicios

**4.12** Se quiere construir un cilindro circular recto con fondo pero *sin* tapa (ver figura). Si se dispone de  $48\pi \text{ cm}^2$  de lata para construirlo; use multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones del cilindro de tal manera que su volumen sea máximo.

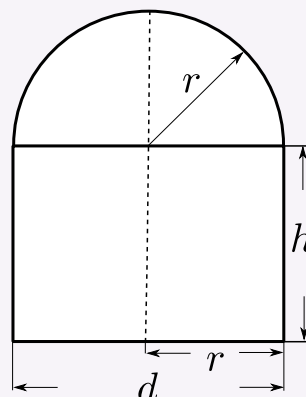


**4.13** Considere la superficie  $S$  de ecuación  $xy^2z = 32$ .

- Si  $(x, y, z) \in S$  entonces  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  y  $z \neq 0$ , ¿Porqué?
- Use multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos  $Q = (x, y, z) \in S$  que están más cerca del origen  $O = (0, 0, 0)$ .

**4.14** Se desea construir un tanque para almacenar agua caliente en un cilindro con un tope esférico (media esfera).

El tanque se debe diseñar de tal manera que puede almacenar  $300\text{m}^3$  de líquido. Determinar la altura total y el diámetro del tanque de tal manera que la pérdida de calor en la superficie sea mínima. (La pérdida de calor en la superficie será mínima si su área es mínima).



**4.15** La densidad de una superficie metálica esférica de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  está dada por  $\rho = 2 + xz + y^2$ . Encuentre los puntos donde la densidad es mayor y menor.

**4.16** Obtener el máximo de  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  sujeta a  $x + y = 3$

**4.17** Sean  $k$  una constante positiva y  $C(r, h) = 2kr^2 + 2.5(2krh)$  con  $r, h > 0$ . Minimizar  $C(r, h)$  sujeta a la restricción  $kr^2h = 1000$ .

**4.18** Calcule los puntos críticos de  $z = x^2y^2$  sujeta a la condición  $x^2 + y^2 = 1$ .

**4.19** Calcule el valor mínimo de la función  $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$  si  $(x, y)$  son puntos de la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ .

## 4.7 (\*) Criterio de clasificación para puntos críticos en 3 variables o más.

En problemas de extremos sin restricciones solo presentamos el criterio de clasificación para dos variables. Ahora vamos a presentar el caso general. Como antes, este criterio de clasificación no siempre funciona y se debe recurrir a otras técnicas.

También presentamos un criterio de clasificación para el caso de problemas de optimización con restricciones.

### Formas cuadráticas.

La *forma cuadrática* general, con  $n$  variables, es

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &\vdots \\ &+ 2a_{(n-1)n}x_{(n-1)}x_n \end{aligned}$$

En particular, para dos y tres variables tendríamos:

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{y} \quad F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a_1xy + 2a_2xz + 2a_3yz$$

### Forma matricial

● Si ponemos  $2a_{ij}x_1x_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$  con  $a_{ij} = a_{ji}$ , entonces  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se puede reescribir así

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &\vdots \\ &+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

Entonces, la forma  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se puede escribir matricialmente así:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = XAX^T$$

donde  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ . Observe que  $A$  es simétrica.

**Ejemplo 4.11**

Sea  $F(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz - 7y^2 - 6yz + 5z^2$ , entonces

$$F(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} (x, y, z)^T$$

**Formas definidas positivas y definidas negativas.** El estudio algebraico de las formas cuadráticas esta centrado, en determinar si una forma tiene siempre el mismo signo, i.e., si la forma es positiva o negativa

**Definición 4.2**

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se dice *definida positiva* si  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ ,  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$ , no todos iguales a cero.

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se dice *definida negativa* si  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ ,  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$ , no todos iguales a cero.

**Teorema 4.4**

$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$ ,  $\forall x, y$ , no todos iguales a cero, si y sólo si

$$a > 0 \text{ y } \text{DET} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$$

$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 < 0$ ,  $\forall x, y$ , no todos iguales a cero, si y sólo si

$$a < 0 \text{ y } \text{DET} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$$

Este teorema se puede probar completando cuadrados:  $F(x, y) = a \left( x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2$ , así,  $F(x, y) > 0$ ,  $\forall x, y$  no todos iguales a cero, si y sólo si  $a > 0$  y  $\frac{ac - b^2}{a}y^2 > 0$ , o sea,  $a > 0$  y  $ac - b^2 > 0$ .

**Generalización.** Para establecer la generalización de este teorema a  $n$  variables, necesitamos las siguientes definiciones:

- Sea  $D_n = |A|$  es decir:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

● Sea  $D_i$  definido de la siguiente manera:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

Los  $D_i$  son los **menores principales** de  $D_n$ .

#### Teorema 4.5

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es *definida positiva* si  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$ ,  $\dots$ ,  $D_n > 0$

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es *definida negativa* si  $D_i > 0$  para  $i$  par, y  $D_i < 0$  para  $i$  impar.

#### Ejemplo 4.12

Sea  $F(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + 4xz + 6y^2 - 4yz + 8z^2$ .  $F$  es definida positiva, pues

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 48 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad D_1 = 2 > 0$$

#### Formas cuadráticas con restricciones lineales.

Supongamos que  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  está restringida a que sus variables cumplan la relación lineal  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ . 'Orlando' los determinantes  $D_i$  obtenemos los nuevos determinantes  $\bar{D}_i$ :

- Sea  $\bar{D}_i$ ,  $i \geq 2$ , definido de la siguiente manera:

$$\bar{D}_i = DET \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_i \\ \alpha_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ \alpha_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \alpha_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

$$\bar{D}_n = DET \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \alpha_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A  $\bar{D}_i$  se le llama **determinante orlado**.

#### Teorema 4.6

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , restringida a que sus variables cumplan la relación lineal  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ , es *definida positiva* si  $\bar{D}_2 < 0$ ,  $\bar{D}_3 < 0$ ,  $\dots$ ,  $\bar{D}_n < 0$

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , restringida a que sus variables cumplan la relación lineal  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ , es *definida negativa* si  $\bar{D}_i > 0$  para  $i \geq 2$ , par; y  $\bar{D}_i < 0$  para  $i$  impar.

#### Ejemplo 4.13

La forma cuadrática  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - 7z^2 + xy$ , sujeta a la relación lineal  $x + y + 2z = 0$ , es definida negativa, pues



$$\bar{D}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -2 < 0, \quad \bar{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

## 16

## Ejercicios

**4.20** Verifique que  $F(x, y) = 4xy - 2x^2 - 3y^2$ , es definida negativa.

**4.21** Verifique que  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz$ , es definida positiva.

**4.22** Verifique que la forma  $F(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$ , restringida a que sus variables cumplan la relación lineal  $2x + y = 0$ , es definida negativa.

**4.23** ¿Es  $F(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$ , definida negativa?

**4.24** Verifique que la forma  $F(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + xy + yz + xz$ , restringida a que sus variables cumplan la relación lineal  $x + y + z = 0$ , es definida negativa.

### Clasificación de puntos críticos.

Recordemos la definición de extremos locales.

#### Definición 4.3

Un punto  $P$  se dice mínimo local de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  si existe un vecindario  $V_P$  alrededor de  $P$  en que se cumple que  $f(P) \leq f(Q)$ ,  $\forall Q \in V_P$ .

Un punto  $P$  se dice máximo local de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  si existe un vecindario  $V_P$  alrededor de  $P$  en que se cumple que  $f(P) \geq f(Q)$ ,  $\forall Q \in V_P$ .

Un punto  $P$  se dice punto de ensilladura (o de silla) de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  si existe un vecindario  $V_P$  alrededor de  $P$  en que se cumple tanto  $f(P) \leq f(Q)$  como  $f(P) \geq f(R)$ , para distintos puntos  $Q, R$  de  $V_P$ .

**Criterio para máximos y mínimos.** El teorema de Taylor se puede generalizar a varias variables así:

Sea  $V$  un conjunto convexo abierto. Si  $f$  es continua y tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, sobre  $V$ , entonces existe  $t \in [0, 1]$  tal que, para cualesquiera dos puntos  $P, Q \in V$ ;  $Q = P + h$

$$f(P+h) = f(P) + \nabla f(P) \cdot h + \frac{1}{2} h H[tQ + (1-t)P] h^T$$

donde  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$

$$H \text{ es llamada } \textit{matriz Hessiana}, |H[R]| = \text{DET} \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(R) & f_{x_1 x_2}(R) & \cdots & f_{x_1 x_n}(R) \\ f_{x_2 x_1}(R) & f_{x_2 x_2}(R) & \cdots & f_{x_2 x_n}(R) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(R) & f_{x_n x_2}(R) & \cdots & f_{x_n x_n}(R) \end{pmatrix}$$

Del teorema de Taylor y de la teoría previa de formas cuadráticas, podemos obtener las siguientes condiciones suficientes para un máximo o un mínimo local.

#### Teorema 4.7

Sea  $D_1(P), D_2(P), \dots, D_n(P)$ ,  $n$  determinantes definidos como sigue:

$$D_i(P) = \text{DET} \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(P) & f_{x_1 x_2}(P) & \cdots & f_{x_1 x_i}(P) \\ f_{x_2 x_1}(P) & f_{x_2 x_2}(P) & \cdots & f_{x_2 x_i}(P) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_i x_1}(P) & f_{x_i x_2}(P) & \cdots & f_{x_i x_i}(P) \end{pmatrix}$$

Entonces,

- $f$  alcanza un un mínimo en  $P$  si  $D_1(P) > 0, D_2(P) > 0, \dots, D_n(P) > 0$
- $f$  alcanza un un máximo en  $P$  si todos los determinantes pares son positivos y todos los determinantes impares son negativos, i. e.,  $D_i(P) > 0$  si  $i$  es par  $D_i(P) < 0$  si  $i$  es impar
- Si ninguna de estas condiciones es satisfecha, entonces en  $P$  podría haber o no haber un extremo local.

#### Ejemplo 4.14

Encontrar los extremos de  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 2yz + 2xz$

**Solución:**

● **Puntos críticos:** Resolvemos el sistema 
$$\begin{cases} f_x = x - y + z = 0 \\ f_y = -x + 3y - z = 0 \\ f_z = x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

así, el único punto crítico es  $P = (0, 0, 0)$ .

● **Test:** Como tenemos una función de tres variables, calculamos  $D_1(P)$ ,  $D_2(P)$  y  $D_3(P)$

$$D_3(P) = DET \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{pmatrix} = DET \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} = 48 > 0$$

$$D_2(P) = DET \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 8 > 0, \quad D_1(P) = f_{xx}(P) = 2 > 0$$

por lo tanto en  $P = (0, 0, 0)$   $f$  alcanza un mínimo local.

### Ejemplo 4.15

Calcule y clasifique los puntos críticos de  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - zy$ .

**Solución:**

● **Puntos críticos:** Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = -2y - z = 0 \\ f_z = -y = 0 \end{cases}$$

así, el único punto crítico es  $P = (0, 0, 0)$ .

● **Test:** Como tenemos una función de tres variables, calculamos  $D_1(P)$ ,  $D_2(P)$  y  $D_3(P)$

$$D_3(P) = DET \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{pmatrix} = DET \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

$$D_2(P) = DET \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 < 0, \quad D_1(P) = f_{xx}(P) = 2 > 0$$

### Clasificación de puntos críticos para problemas con restricciones.

Consideremos el problema

“Optimizar la *función objetivo*:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sujeta a la restricción:  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ ”

La función lagrangiana será:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda(c - g(x_1, \dots, x_n))$$

Así, los puntos críticos se obtienen resolviendo el sistema (condiciones de primer orden)

$$\begin{cases} L_{x_1} = f_{x_1} - \lambda g_{x_1} = 0 \\ L_{x_2} = f_{x_2} - \lambda g_{x_2} = 0 \\ \vdots \\ L_{x_n} = f_{x_n} - \lambda g_{x_n} = 0 \\ L_{\lambda} = g(x_1, x_2, \dots, x_n) - c = 0 \end{cases}$$

El criterio que se usará para clasificar los puntos críticos difiere del criterio que se usa en el problema de optimización sin restricciones.

#### Teorema 4.8

Consideremos el hessiano orlado

$$\overline{D}_n(P) = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(P) & g_{x_2}(P) & \cdots & g_{x_n}(P) \\ g_{x_1}(P) & L_{x_1x_1}(P) & L_{x_1x_2}(P) & \cdots & L_{x_1x_n}(P) \\ g_{x_2}(P) & L_{x_2x_1}(P) & L_{x_2x_2}(P) & \cdots & L_{x_2x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n}(P) & L_{x_nx_1}(P) & L_{x_nx_2}(P) & \cdots & L_{x_nx_n}(P) \end{vmatrix}$$

y sus menores principales

$$\overline{D}_i(P) = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(P) & g_{x_2}(P) & \cdots & g_{x_i}(P) \\ g_{x_1}(P) & L_{x_1x_1}(P) & L_{x_1x_2}(P) & \cdots & L_{x_1x_i}(P) \\ g_{x_2}(P) & L_{x_2x_1}(P) & L_{x_2x_2}(P) & \cdots & L_{x_2x_i}(P) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_i}(P) & L_{x_ix_1}(P) & L_{x_ix_2}(P) & \cdots & L_{x_ix_i}(P) \end{vmatrix}$$

Entonces, si  $P$  es un punto crítico de  $f$  sujeto a la restricción  $g(x_1, \dots, x_n) = c$ , se tiene

- En  $P$   $f$  alcanza un mínimo local si  $D_2(P) < 0$ ,  $D_3(P) < 0$ , ...,  $D_n(P) < 0$
- En  $P$   $f$  alcanza un máximo local si todos los determinantes pares son positivos y todos los determinantes impares son negativos, i. e.,

$$D_i(P) > 0 \text{ si } i \geq 2, \text{ es par}$$

$$D_i(P) < 0 \text{ si } i \text{ es impar}$$

En el anterior teorema, no aparece  $\overline{D}_1$ . Este siempre es negativo.

Cuando aparece más de una restricción, se debe considerar un hessiano con más de una orla:

Si hay  $n$  variables y  $m$  restricciones ( $m < n$ ) de la forma  $g^i(x_1, \dots, x_n) = c_i$  entonces la lagrangiana será

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [c_i - g^i(x_1, \dots, x_n)]$$

y el hessiano orlado será:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_n^1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^m & g_2^m & \cdots & g_n^m \\ g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^m & L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} & \cdots & L_{x_1 x_n} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^m & L_{x_n x_1} & L_{x_n x_2} & \cdots & L_{x_n x_n} \end{vmatrix}$$

**Ejemplo 4.16**

Hallar los extremos de  $z = x^2 + y^2$  sujeto a la restricción  $x + 4y = 2$ .

**Solución:** La función lagrangiana es  $x^2 + y^2 - \lambda(2 - x - 4y)$ .

$$\text{Puntos críticos: } \begin{cases} L_x = 2x - \lambda = 0 \\ L_y = 2y - 4\lambda = 0 \\ L_\lambda = 2 - x - 4y = 0 \end{cases} \implies \lambda = \frac{4}{17}, \quad x = \frac{2}{17}, \quad y = \frac{8}{17}.$$

Así, el único punto crítico es:  $P = (\frac{2}{17}, \frac{8}{17})$

**Test:** Usemos el teorema para clasificar los puntos críticos. En este caso, solo debemos calcular el hessiano orlado  $\overline{D}_2$

$$\overline{D}_2(P) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -34 < 0$$

así que  $(\frac{2}{17}, \frac{8}{17}, z(\frac{2}{17}, \frac{8}{17}))$  es un mínimo local.

**Ejemplo 4.17**

Maximizar  $f(x, y) = 2y - x$  sujeto a  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$

**Solución:**  $F(x, y, \lambda) = 2y - x - \lambda(y - \sin x)$

**Puntos críticos:**

$$\begin{cases} F_x = -1 + \lambda \cos x = 0 \\ F_y = 2 - \lambda = 0 \\ F_\lambda = -y + \sin x = 0 \end{cases} \implies \lambda = 2, \cos x = \frac{1}{2} \text{ o sea, } x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}.$$

Así los puntos críticos son:  $P_1 = (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  y  $P_2 = (\frac{5\pi}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$

**Test:** Usemos el teorema para clasificar los puntos críticos. En este caso, solo debemos calcular el hessiano orlado  $\bar{D}_2$

$$\bar{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\cos x & 1 \\ -\cos x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

así que  $\bar{D}_2(P_1) = \bar{D}_2(P_2) = 0$  y, en este caso, el criterio no da información.

## 17

### Ejercicios

En los siguientes ejercicios, la clasificación de los puntos críticos puede hacerse usando el criterio del Hessiano orlado o haciendo una curva (si se pudiera).

**4.25** Obtener el máximo de  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  sujeta a  $x + y = 3$

**4.26** Minimizar  $C(r, h) = 2kr^2 + 2.5(2krh)$  sujeta a la restricción  $Kr^2h = 1000$ ,  $K, r, h > 0$ .

**4.27** Calcule máximos y mínimos de  $z = 4x^2 + 9y^2$  sujeta a la condición  $x^2 + y^2 = 1$ .

**4.28** Calcule máximos y mínimos de  $z = 4xy$  sujeta a la condición  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**4.29** Calcule máximos y mínimos de  $z = x^2y^2$  sujeta a la condición  $x^2 + y^2 = 1$ .

**4.30** Calcule máximos y mínimos de  $z = yx + y^2$  sujeta a la condición  $\ln x - \ln y = 1$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

**4.31** Calcule máximos y mínimos de  $w = zyx$  sujeta a la condición  $x^2 + y^2/9 + z^2/4 - 1 = 0$ .

## 4.8 (\*) Extremos globales. Condiciones de Kuhn-Tucker.

Haremos aquí, una pequeño acercamiento a la programación no lineal. Sea  $w$  una función posiblemente no lineal,

● Un problema de maximización en programación no lineal, tiene la siguiente forma:

“Maximizar  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sujeto a  $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  con  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .”

● Un problema de minimización en programación no lineal, tiene la siguiente forma:

“Minimizar  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sujeto a  $g_i(x_1, \dots, x_n) \geq c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  con  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .”

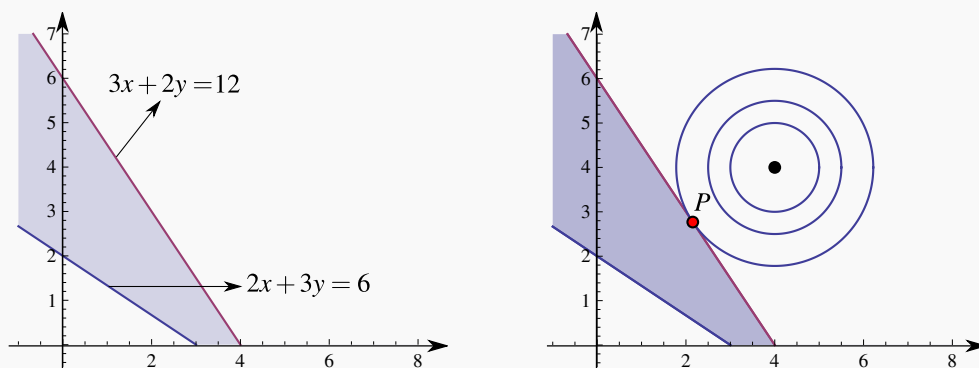
**Solución gráfica.** Para obtener una solución gráfica de un problema de programación no lineal (o lineal) sencillo, usamos las mismas ideas que se discutieron en la sección de multiplicadores de Lagrange. Las restricciones  $g_i \leq 0$  y las condiciones de no negatividad, determinan una región factible para encontrar una solución. Nos movemos luego, sobre esta región o hacia esta región, sobre las curvas de nivel de  $w$ , en la dirección en la que  $w$  crece o decrece, según sea el problema (maximización o minimización).

Una vez encontrada una solución, el problema de determinar si es un máximo (o mínimo) global depende de que se satisfagan ciertas condiciones.

#### Ejemplo 4.18

Minimizar  $w = (x-4)^2 + (y-4)^2$ , sujeto a las condiciones  $2x+3y \geq 6$ , y  $3x+2y \leq 12$ ,  $x, y \geq 0$ .

**Solución:** Aquí las restricciones son lineales. La región factible es la región sombreada en las figuras. La función  $w$  es un paraboloide con vértice en  $(4, 4, 0)$ . La dirección de *decrecimiento* es hacia el vértice (entre más me acerco al centro, más pequeño se hace  $w$ ). El punto  $P$ , donde  $w$  alcanza el mínimo local, se encontraría en el “punto más profundo” de la región factible en la dirección de *decrecimiento*.



Para calcular este punto, observamos que la recta de contacto es  $3x + 2y = 12$ . La curva de nivel de contacto es  $(x-4)^2 + (y-4)^2 = k$ . Así que tenemos que calcular los puntos  $P$ , sobre esta curva de nivel, donde la recta tangente es  $3x + 2y = 12$ , o más precisamente, los puntos  $P = (a, b)$ , sobre esta curva de nivel, donde la pendiente de la recta tangente es  $-3/2$



La pendiente de la recta tangente a la curva de nivel  $(x-4)^2 + (y-4)^2 = k$ , en  $P$  es

$$y'(a,b) = -3/2 = -\frac{F_x(P)}{F_y(P)} = -\frac{a-4}{b-4}$$

y, puesto que  $P$  está también sobre la recta  $3x+2y=12$ , entonces tendríamos que  $3a+2b=12$ .

$$\text{Resolvemos entonces el sistema: } \begin{cases} -\frac{a-4}{b-4} = -3/2 \\ 3a+2b = 12 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{28}{13}, b = \frac{36}{13}.$$

### Condiciones de Kuhn-Tucker.

Consideremos el problema

“Maximizar  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sujeto a  $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  con  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .”

Entonces, consideremos la función lagrangiana

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m y_i [c_i - g_i(x_1, \dots, x_n)]$$

Las  $y_i$  son los multiplicadores de Lagrange.

● Las *condiciones de Kuhn-Tucker para un máximo* son

$$L_{x_j} \leq 0, \quad x_j \geq 0, \quad x_j L_{x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$L_{y_i} \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad y_i L_{y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

● Las *condiciones de Kuhn-Tucker para un mínimo* son

$$L_{x_j} \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad x_j L_{x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$L_{y_i} \leq 0, \quad y_i \geq 0, \quad y_i L_{y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Bajo ciertas hipótesis, las condiciones de Kuhn-Tucker, son condiciones **necesarias y suficientes** para determinar si en un punto  $P$ , la función objetivo  $w$  alcanza un máximo o mínimo **global**.

**Teorema 4.9 (Versión para restricciones lineales).**

Dado el problema no lineal

“Maximizar (o Minimizar)  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sujeto a  $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  con  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,” si se satisfacen las siguientes condiciones:

- a.) las  $g_i$  son lineales (diferenciables y convexas) en el octante no negativo,
- b.)  $f$  es diferenciable y cóncava en el octante no negativo,
- c.) el punto  $P$  satisface las condiciones de Kuhn-Tucker

entonces en  $P$ , la función objetivo  $w$  alcanza un máximo (o mínimo) **global**.

Para verificar que un punto  $P$  satisface las condiciones de Kuhn-Tucker, se desarrollan estas condiciones, i.e., se calculan las derivadas parciales  $L_{x_j}$  y las  $L_{y_i}$ , luego las  $L_{x_j}$  se evalúan en  $P$  y se debe verificar que existen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  tal que se satisface todo el conjunto de condiciones.

**Ejemplo 4.19**

Minimizar  $w = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$ , sujeto a las condiciones  $2x + 3y \geq 6$ ,  $-3x - 2y \geq -12$ ,  $x, y \geq 0$ .

**Solución:** Ya sabemos que  $w$  podría alcanzar un a mínimo global en  $P = (\frac{28}{13}, \frac{36}{13})$ . Ahora verificamos si satisface las condiciones de Kuhn-Tucker, pues las condiciones a.) y b.) ya se cumplen.

Sea  $L = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + y_1(6 - 2x - 3y) + y_2(-12 + 3x + 2y)$ . Como es un problema de minimización, las condiciones son

1.  $L_x = 2(x - 4) - 2y_1 + 3y_2 \geq 0$
2.  $L_y = 2(y - 4) - 3y_1 + 2y_2 \geq 0$
3.  $L_{y_1} = 6 - 2x - 3y \leq 0$
4.  $L_{y_2} = -12 + 3x + 2y \leq 0$
5.  $xL_x = 2x(x - 4) - 2xy_1 + 3xy_2 = 0$
6.  $yL_y = 2y(y - 4) - 3yy_1 + 2yy_2 = 0$
7.  $y_1L_{y_1} = 6y_1 - 2xy_1 - 3yy_1 = 0$

$$8. \quad y_2 L_{y_2} = -12y_2 + 3xy_2 + 2yy_2 = 0$$

Las condiciones de no negatividad, claramente se cumplen para el punto  $P$ . Ahora debemos evaluar estas ocho condiciones en nuestro punto  $P$  y verificar que existen  $y_1, y_2$  tales que las condiciones se cumplen.

Al sustituir en las condiciones 5. y 6. obtenemos que  $L_x(P) = 0$  y que  $L_y(P) = 0$ , de donde se obtiene

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 = 48/13 \\ -3y_1 + 2y_2 = 32/13 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{16}{13},$$

que son no negativas como se pedía. Con estos valores de las  $y_i$  y  $P$ , se cumplen todas las condiciones de Kuhn-Tucker. Por tanto en  $P$  la función objetivo  $w$  alcanza un mínimo global.

## 18

## Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios usando el método gráfico. Aplique, si se puede, las condiciones de Kuhn-Tucker.

**4.32** Maximizar  $w = x^2 + y^2$ , sujeto a las condiciones  $2x + 3y \geq 6$ ,  $-3x - 2y \geq -12$ ,  $x, y \geq 0$ .

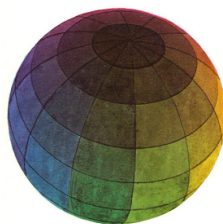
**4.33** Maximizar  $z = 3x + 2y$ , sujeta a las restricciones  $-3x + 2y \leq 6$  y  $-4x + 9y \leq 36$ ,  $x, y \geq 0$

**4.34** Maximizar  $z = 4x + 3y$ , sujeta a las restricciones  $2x + 3y \leq 18$  y  $4x + 2y \leq 10$ ,  $x, y \geq 0$

**4.35** Minimizar  $z = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ , sujeta a las restricciones  $-3x + 2y \leq 6$  y  $-4x + 9y \leq 36$ ,  $x, y \geq 0$

**4.36** Minimizar  $z = 3x^2 + (y - 1)^2$ , sujeta a las restricciones  $-3x - y \leq 6$  y  $-4x + y \leq 6$ ,  $x, y \geq 0$

**4.37** Minimizar  $z = -x^4$ , sujeta a las restricciones  $x \leq 6$  y  $x \geq -2$



Versión actualizada de este libro:  
<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/>

Integral doble.  
 Cálculo de integrales dobles. Integral ite-  
 rada.  
 Área y Volumen  
 Cambio de variable en una integral doble.  
 Coordenadas Polares.  
 Integral triple.  
 Cambio de variables en integral triple.  
 Coordenadas cilíndricas.  
 (\*)Coordenadas esféricas.  
 Describiendo Superficies en Coordena-  
 das Esféricas.  
 Cambio de variable con coordenadas  
 esféricas.  
 (\*)Singularidades.

## 5 — Integral doble e integral triple.

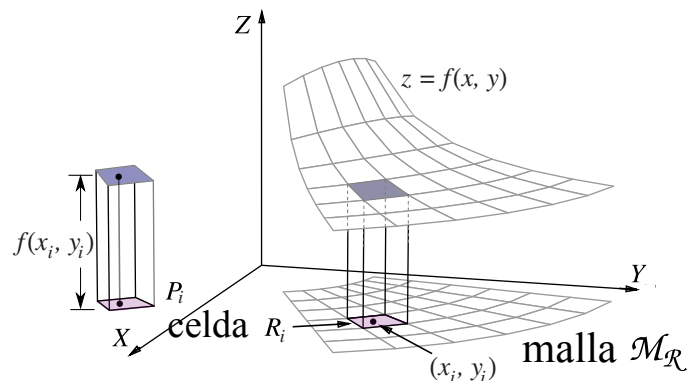
### 5.1 Integral doble.

Sea  $R$  es una región acotada y cerrada del plano, de área  $A(R)$  y sea  $f : R^2 \rightarrow R$  una función definida y acotada sobre  $R$ . Supongamos que  $M_R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  es un conjunto de  $n$  celdas que conforman una *mall*a que cubre  $R$  (ver figura). El área de cada celda  $R_i$  la denotamos con  $\Delta A_i$ .

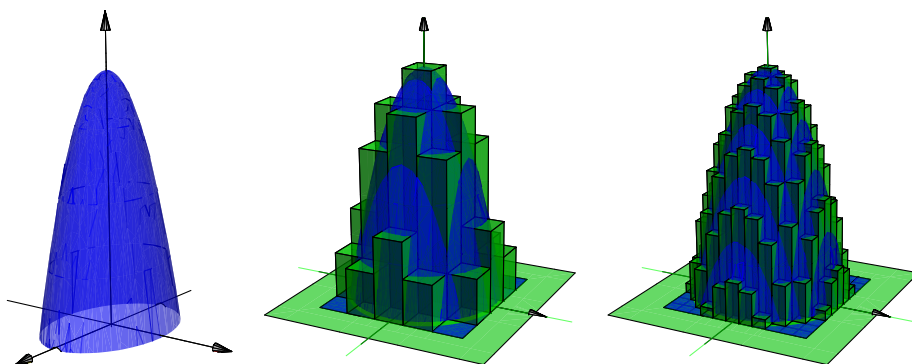
Una suma de Riemann de  $f$  sobre  $R$  es una expresión de la forma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

donde  $(x_i, y_i) \in R_i$ .



Si  $f$  es continua y positiva sobre  $R$ , entonces  $f(x_i, y_i) \Delta A_i$  aproxima el volumen de cada prisma  $P_i$  de base  $R_i$  y altura  $f(x_i, y_i)$ ; en este caso la suma de Riemann aproxima el volumen del sólido entre la región  $R$  y el gráfico de  $f$ .



**Diámetro de la malla.** El *diámetro* de cada celda  $R_i$  es la máxima distancia entre todas las distancias entre cualesquiera dos puntos en  $R_i$  y se denota  $||R_i||$ . El *diámetro* de la malla  $M_R$  es  $||M_R|| = \sup_i \{||R_i||\}$ .

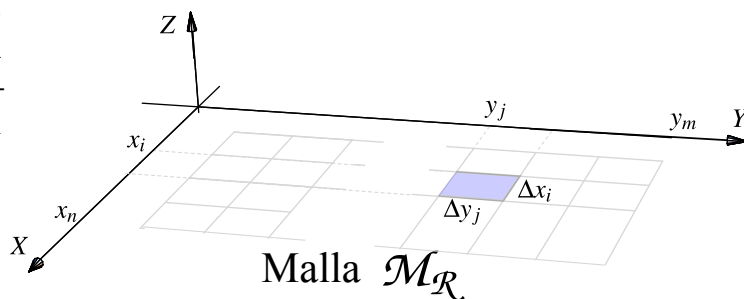
**Definición 5.1 (Función integrable).**

Si las sumas de Riemann de  $f$  sobre  $M_R$  tienen un límite, independiente de la escogencia de los  $(x_i, y_i)$ , conforme  $||M_R|| \rightarrow 0$ , entonces decimos que  $f$  es *integrable* sobre  $R$  y que la integral es este límite. En este caso escribimos,

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{||M|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{con } n = \text{Card}(M)$$

En el caso de que  $R$  sea una región rectangular, la malla  $M_R$  se puede tomar como un conjunto de rectángulos  $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  de área  $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ . En este caso es natural reemplazar el elemento de área  $dA$  por  $dx dy$  y escribir el límite como,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$



Las propiedades de las funciones integrables en dos variables son similares a las propiedades de las funciones integrables en una variable.

**Teorema 5.1 (Propiedades de las funciones integrables).**

- a.) Si  $f$  es continua sobre  $R$ , entonces  $f$  es integrable sobre  $R$ .
- b.) Sea  $k \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $R$ , entonces  $kf$  y  $f \pm g$  son integrables sobre  $R$  y

$$\iint_R kf(x, y) dA = k \iint_R f(x, y) dA \quad \text{y} \quad \iint_R f(x, y) \pm g(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

c.) Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre regiones  $R$  y  $S$  que no se traslapan, entonces  $f$  es integrables sobre  $R \cup S$  y

$$\iint_{R \cup S} f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_S f(x, y) dA$$

d.) Si  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $R$  y  $f(x, y) \leq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in R$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

e.) Si  $f$  es integrable sobre  $R$  y  $M \leq f(x, y) \leq m$  para todo  $(x, y) \in R$ , entonces

$$M A(R) \leq \iint_R f(x, y) dA \leq m A(R)$$

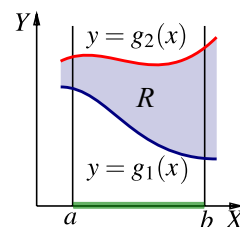
**Otros tipos de integración.** El concepto de integral que hemos visto es el concepto de integral en el sentido de Riemann y es suficiente para los cálculos y las aplicaciones en este libro. Para otros propósitos esta integral no es adecuada y se requiere definir un tipo más general de integración, por ejemplo la integral en el sentido Lebesgue. Una diferencia esencial entre una integral y otra es la manera en que se *mide* los conjuntos de puntos. La integral de Riemann usa medida de Jordan y la de Lebesgue, medida de Lebesgue.

## 5.2 Cálculo de integrales dobles. Integral iterada.

**Integrales iteradas.** El teorema de Fubini establece que si  $f$  es continua sobre  $R$ , la integral doble se puede evaluar por “integración parcial” respecto a cada variable, una a la vez. Este es el método de “integrales iteradas”. Primero debemos especificar dos maneras de describir una misma región.

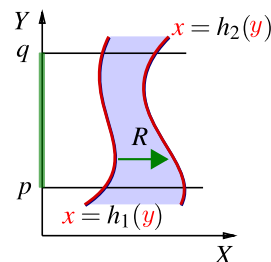
● Región entre las curvas  $y = g_1(x)$  y  $y = g_2(x)$ .

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } a \leq x \leq b \text{ y } g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$   
con  $g_1$  y  $g_2$  funciones continuas en  $[a, b]$ .



● Región entre las curvas  $x = h_1(y)$  y  $x = h_2(y)$ .

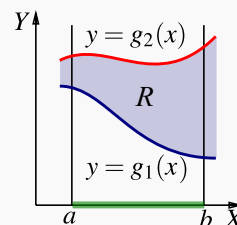
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } p \leq y \leq q \text{ y } h_2(y) \leq x \leq h_1(y)\}$   
con  $h_1$  y  $h_2$  funciones continuas en  $[p, q]$ .



**Teorema 5.2 (Fubini).**

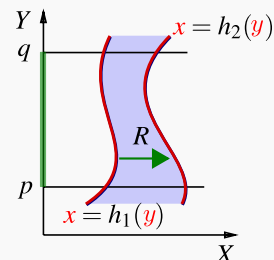
Sea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } a \leq x \leq b \text{ y } g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\}$  con  $g_1$  y  $g_2$  funciones continuas en  $[a, b]$ . Si  $f$  es continua en  $R$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$



Sea  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } p \leq y \leq q \text{ y } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$  con  $h_1$  y  $h_2$  funciones continuas en  $[p, q]$ . Si  $f$  es continua en  $R$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_p^q \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_p^q \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

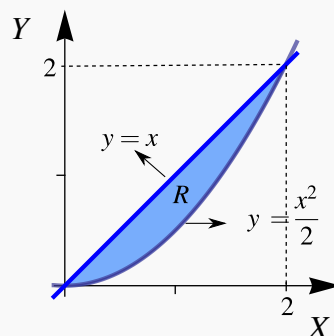
**Ejemplo 5.1**

Sea  $R$  la región de la figura. Vamos a calcular  $\iint_R xy dA$  usando el orden de integración “ $dy dx$ ” y el orden de integración “ $dx dy$ .”

Observe que  $R$  se puede describir como

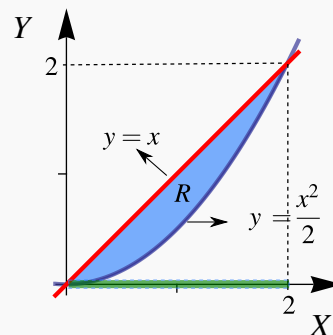
$$R : 0 \leq x \leq 2, \frac{x^2}{2} \leq y \leq x$$

$$R : 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq \sqrt{2y}.$$



● Integrando en el orden “ $dy dx$ ”

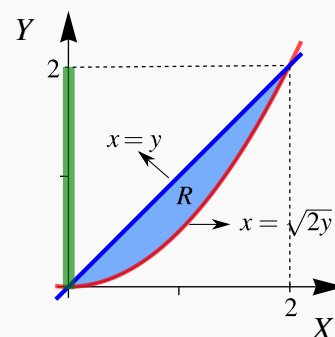
$$\begin{aligned} \iint_R xy dA &= \int_0^2 \left[ \int_{\frac{x^2}{2}}^x xy dy \right] dx \\ &= \int_0^2 \left[ x \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{x^2}{2}}^x \right] dx \\ &= \int_0^2 \left[ x \frac{x^2}{2} - x \frac{x^4}{8} \right] dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$





● Integrando en el orden “ $dx dy$ ”

$$\begin{aligned}
 \iint_R xy \, dA &= \int_0^2 \left[ \int_y^{\sqrt{2y}} xy \, dx \right] dy \\
 &= \int_0^2 \left. \frac{x^2}{2} y \right|_y^{\sqrt{2y}} dy \\
 &= \int_0^2 \left[ \frac{2y}{2} y - \frac{y^2}{2} y \right] dy = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

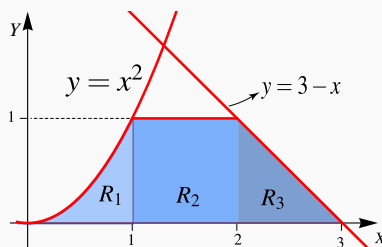
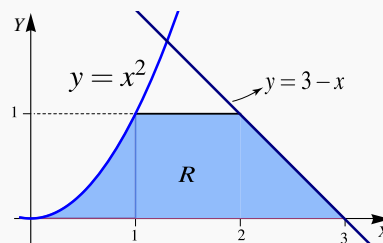


### Ejemplo 5.2

En este ejemplo se muestra como el número de regiones de integración puede variar, de acuerdo a la elección del orden de integración.

Considere la integral  $I = \iint_R x^2 + y^2 \, dA$ , donde  $R$  es la región de la figura. Vamos a calcular esta integral doble, usando el orden de integración “ $dy dx$ ” y el orden de integración “ $dx dy$ .”

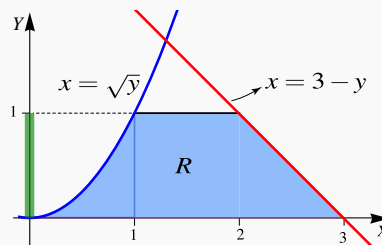
● Orden “ $dy dx$ ”: en este caso  $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ . La manera de ver la región es como sigue,



$$\begin{aligned}
 \iint_R x^2 + y^2 dA &= \int_0^1 \left[ \int_0^{x^2} x^2 + y^2 dy \right] dx + \int_1^2 \left[ \int_0^1 x^2 + y^2 dy \right] dx + \int_2^3 \left[ \int_0^{3-x} x^2 + y^2 dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{x^2} dx + \int_1^2 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 dx + \int_2^3 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{3-x} dx \\
 &= \int_0^1 x^4 + \frac{x^6}{3} dx + \int_1^2 \frac{1}{3} + x^2 dx + \int_2^3 9 - 9x + 6x^2 - \frac{4x^3}{3} dx = \frac{1207}{210}
 \end{aligned}$$

● Orden “ $dx dy$ ”

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left[ \int_{\sqrt{y}}^{3-y} x^2 + y^2 dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_{\sqrt{y}}^{3-y} \right] dy \\
 &= \int_0^1 9 - 9y - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + 6y^2 - y^{\frac{5}{2}} - \frac{4y^3}{3} dy \\
 &= \frac{1207}{210}
 \end{aligned}$$

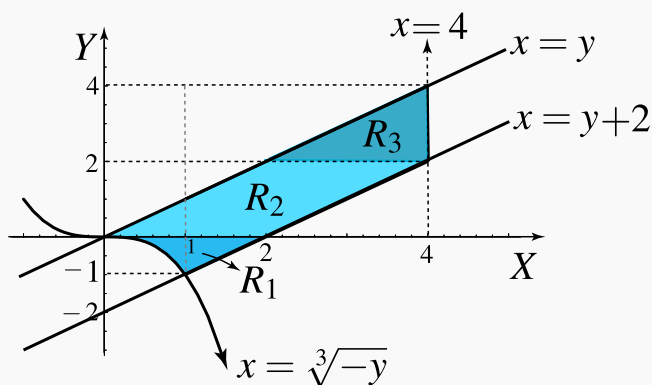


### Ejemplo 5.3

Considere la integral  $I = \int_0^1 \int_{-x^3}^x f(x, y) dy dx + \int_1^4 \int_{x-2}^x f(x, y) dy dx$ . Dibuje la región de integración y re-escriba la integral en el orden “ $dx dy$ .”

**Solución:** La región de integración en la primera integral es  $0 \leq x \leq 1$  y  $x \leq y \leq -x^3$ . La región de integración en la segunda integral es  $1 \leq x \leq 4$  y  $x \leq y \leq x-2$ .

En la figura aparece la región de integración. Si  $y$  es la variable independiente,  $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ .



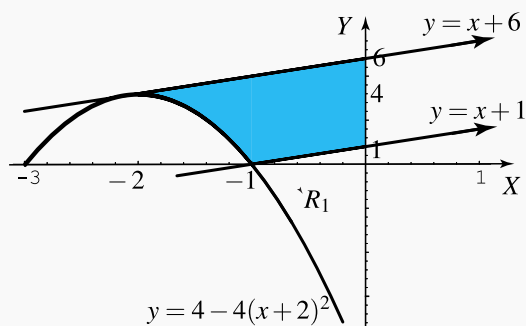
● Orden " $dx dy$ "

$$\begin{aligned}
 \iint_R f(x, y) dA &= \iint_{R_3} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA + \iint_{R_1} f(x, y) dA \\
 &= \int_{-2}^4 \int_y^4 f(x, y) dx dy + \int_0^2 \int_y^{y+2} f(x, y) dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt[3]{-y}}^{y+2} f(x, y) dx dy
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.4

Sea  $I = \int_{-2}^{-1} \int_{4-4(x+2)^2}^{x+6} dy dx + \int_{-1}^0 \int_{x+1}^{x+6} dy dx$ .

- Dibuje la región de integración.
- Plantear la integral o las integrales que corresponden a  $I$  invirtiendo el orden de integración.



**Solución:** La región es

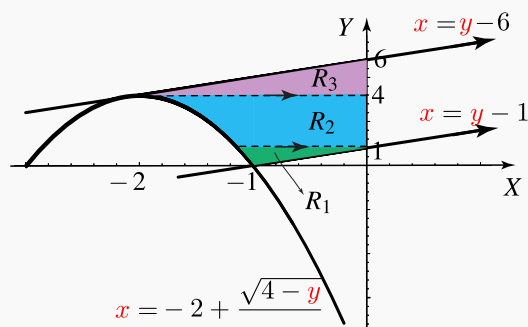
$$R : \begin{cases} 4 - 4(x+2)^2 \leq y \leq x+6 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ x+1 \leq y \leq x+6 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Para integrar en el orden “ $dx dy$ ” hay que partir la región en tres subregiones  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ .

$$\begin{cases} R_1: -2 + \frac{\sqrt{4-y}}{2} \leq x \leq y-1 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ R_2: -2 + \frac{\sqrt{4-y}}{2} \leq x \leq 0 & \text{si } 1 \leq y \leq 4 \\ R_3: y-6 \leq x \leq 0 & \text{si } 4 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

Luego,

$$I = \int_0^1 \int_{-2 + \frac{\sqrt{4-y}}{2}}^{y-1} dx dy + \int_1^4 \int_{-2 + \frac{\sqrt{4-y}}{2}}^0 dx dy + \int_4^6 \int_{y-6}^0 dx dy$$



### 5.3 Área y Volumen

- De acuerdo con nuestra definición de integral doble, El área  $A_R$  de una región  $R$  se puede calcular con la integral doble (“área de la base  $\times$  altura”)

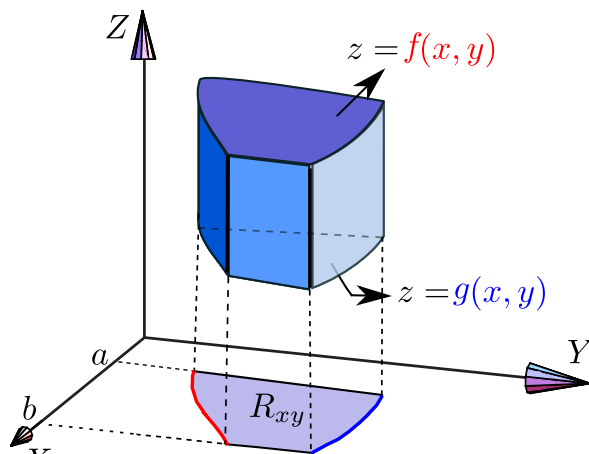
$$A_R = \iint_R 1 dA$$

- Sea  $f(x, y) \geq 0$  y continua en una región cerrada  $R$ . Sea  $V_Q$  el volumen del sólido  $Q$  que tiene a  $R$  como base y una altura de medida  $f(x, y)$  en cada  $(x, y) \in R$ , entonces

$$V_Q = \iint_R f(x, y) dA$$

- Si el sólido  $Q$  está limitado, sobre la región cerrada  $R$ , por dos superficies de ecuaciones  $z = f(x, y)$  y  $z = g(x, y)$  con  $f$  y  $g$  continuas y  $f(x, y) - g(x, y) \geq 0$  sobre  $R$ , entonces

$$V_Q = \iint_R f(x, y) - g(x, y) dA$$

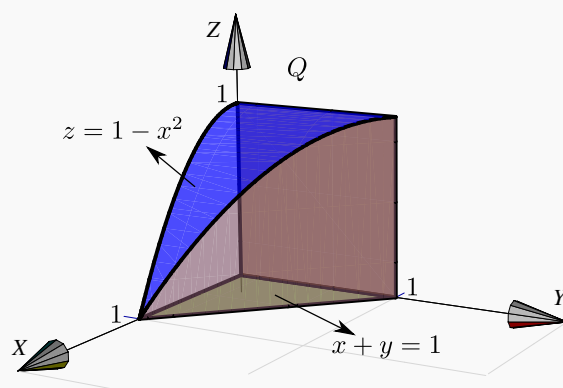


- Muchas veces es conveniente considerar como la región  $R$  la proyección del sólido sobre los planos  $XZ$  o  $YZ$ .

### Ejemplo 5.5

Sea  $Q$  el sólido limitado por las superficies  $z = 1 - x^2$ , y  $x + y = 1$  en el primer octante. Calcule  $V_Q$  usando como región  $R$  cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos  $XY$ ,  $YZ$ ,  $XZ$ .

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

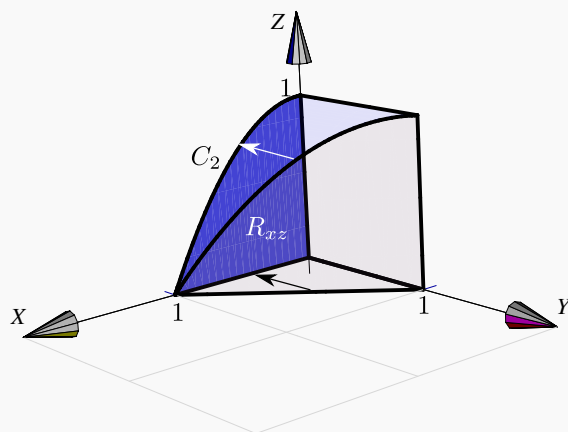


#### Solución:

• **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $XZ$ .** La proyección sobre el plano  $XZ$  se muestra en la figura. La región está entre la curva  $C_2 : z = 1 - x^2$  y el eje  $X$ .

Desde el punto de vista del plano  $XZ$ , el sólido está limitado por las superficies  $x = 0$  y  $y = 1 - x$ . Integrando en el orden " $dz dx$ " queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1-x-0) \, dz \, dx \\ &= \int_0^1 (z - zx) \Big|_0^{1-x^2} \, dx \\ &= \int_0^1 (1-x)(1-x^2) \, dx = \frac{5}{12} \end{aligned}$$



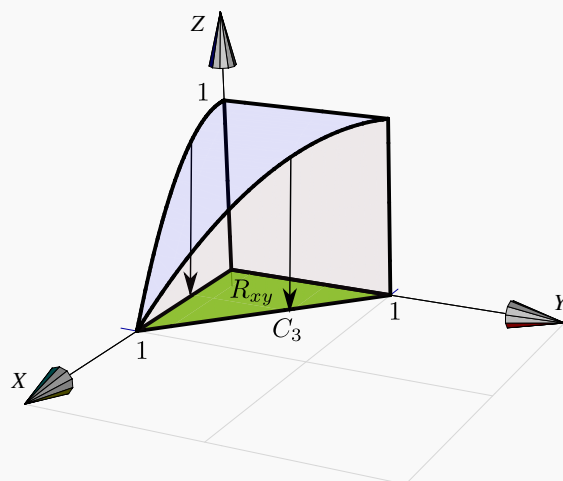
● **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $XY$ .** La proyección sobre el plano  $xy$  se muestra en la figura

La ecuación de la curva  $C_3$  corresponde a  $y = 1 - x$

con  $x \in [0, 1]$ . Desde el punto de vista del plano  $XY$ , el sólido  $Q$  está entre las superficies  $z = 1 - x^2$  y  $z = 0$ .

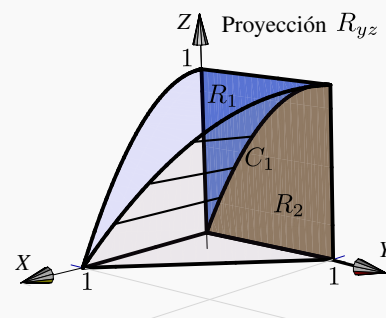
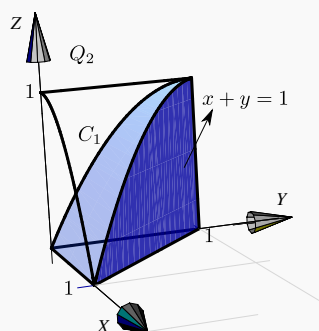
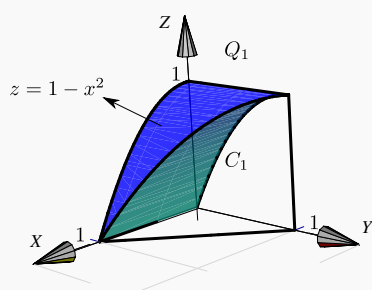
Integrando en el orden “ $dy dx$ ” queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x^2 - 0 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 1 - x - x^2(1 - x) \, dx = \frac{5}{12} \end{aligned}$$



● **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $YZ$ .** En este caso, el sólido no está entre dos superficies. Desde el punto de vista del plano  $YZ$ , tenemos un sólido  $Q_1$  que está entre  $x = 0$  y  $z = 1 - x^2$  en la región  $R_1$  y un sólido  $Q_2$  que está entre  $x = 0$  y el plano  $x + y = 1$  en  $R_2$ . Además,  $Q = Q_1 \cup Q_2$ , como se muestra en la figura, y entonces

$$V_Q = V_{Q_1} + V_{Q_2}$$



La proyección sobre este plano se muestra en la figura. La curva de proyección  $C_1$  es la proyección sobre  $YZ$  de la curva de intersección entre la superficie  $z = 1 - x^2$  y el plano  $x + y = 1$ .  $C_1$  tiene ecuación en términos de  $x$  e  $y$ .

$$z = 1 - x^2 \cap x + y = 1 \Rightarrow z = 1 - (1 - y)^2, \quad y \in [0, 1]$$

La curva  $C_1$  divide la región de integración en dos partes, la región  $R_1$  y la región  $R_2$ .

Desde el punto de vista del plano  $YZ$ , el sólido está limitado por las superficies

- $x = \sqrt{1-z}$  y  $x = 0$  sobre  $R_1$ .

- $x = 1-y$  y  $x = 0$  sobre  $R_2$ .

Integrando en el orden “ $dz dy$ ” queda

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_{2y-y^2}^1 \sqrt{1-z} - 0 \, dz \, dy + \int_0^1 \int_0^{2y-y^2} 1-y - 0 \, dz \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{2(1-2y+y^2)^{3/2}}{3} \, dy + \int_0^1 (2y-3y^2+y^3) \, dy = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

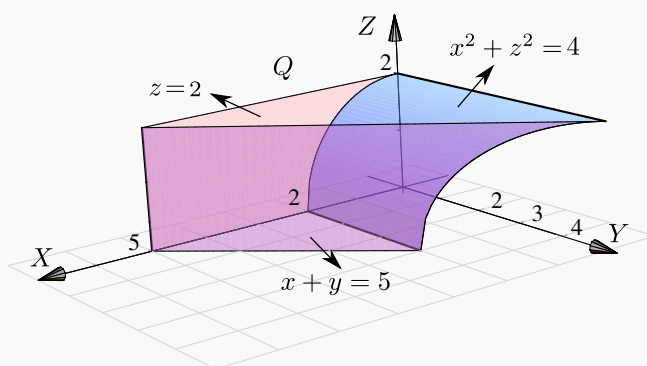
**Nota:**  $(1-2y+y^2)^{3/2} = \sqrt{(y-1)^6} = |(y-1)^3| = -(y-1)^3$  si  $y \in [0, 1]$ .

### Ejemplo 5.6

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Sea  $Q$  el sólido limitado por las superficies  $x^2 + z^2 = 4$ ,  $x + y = 5$ ,  $z = 2$ ,  $y = z = 0$ .

Plantear la o las integrales dobles necesarias para calcular  $V_Q$  usando como región  $R$  cada una de las proyecciones del sólido sobre los planos  $YZ$ ,  $XZ$ ,  $XY$

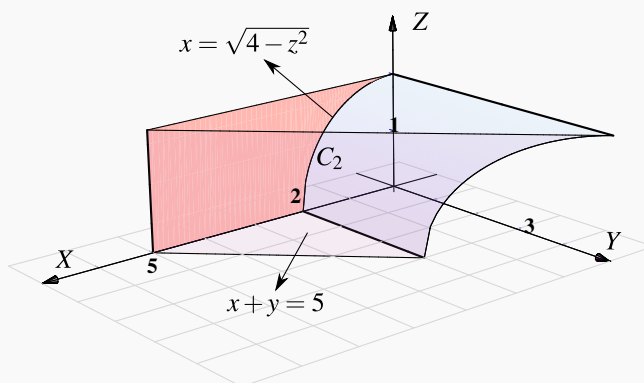


**Solución:**

• **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $XZ$ .**

La proyección  $R_{yz}$  sobre el plano  $xz$  se muestra en la figura. La ecuación de la curva  $C_2$  corresponde a  $x^2 + z^2 = 4$  con  $x \in [0, 2]$ .

Sobre la región  $R_{yz}$ , el sólido  $Q$  está entre las superficies  $y = 0$  (abajo) y  $y = 5 - x$  (arriba).



Usando el orden de integración “ $dx dz$ ” tenemos

$$\begin{aligned}
 V_Q &= \int_0^2 \int_{\sqrt{4-z^2}}^5 (5-x-0) dx dz \\
 &= \int_0^2 \left( \frac{29}{2} - \frac{z^2}{2} - 5\sqrt{4-z^2} \right) dz \\
 &= \left( \frac{29z}{2} - \frac{z^3}{6} - \frac{5z\sqrt{4-z^2}}{2} - 10 \arcsin\left(\frac{z}{2}\right) \right) \Big|_0^2 = \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587
 \end{aligned}$$

**Nota:** Utilizando la sustitución trigonométrica  $\frac{z}{2} = \sin\theta$ , se obtiene (salvo constantes)

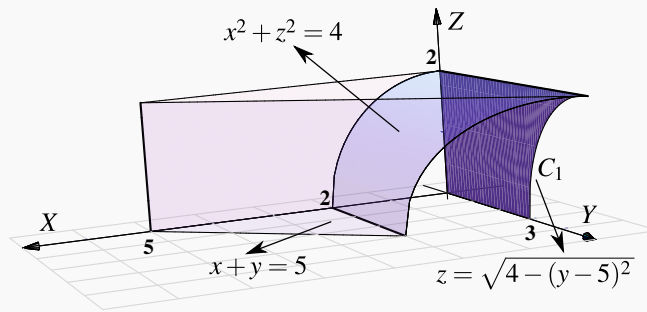
$$\int \sqrt{4-z^2} dz = \frac{z\sqrt{4-z^2}}{2} + 2 \arcsin\left(\frac{z}{2}\right).$$

● **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $YZ$ .**

La proyección  $R_{yz}$  sobre el plano  $yz$  se muestra en la figura. Para hallar la ecuación de la curva  $C_1$  observe que esta curva está arriba del eje  $y$  por lo que:

$$C_1: x^2 + z^2 = 4 \cap x + y = 5 \Rightarrow \begin{cases} z = +\sqrt{4-(5-y)^2} & \text{si } y \in [3, 5] \\ 0 & \\ y = 5 - \sqrt{4-z^2} & \text{si } z \in [0, 2] \end{cases}$$





Sobre la región  $R_{yz}$ , el sólido  $Q$  está entre las superficies  $x = \sqrt{4 - z^2}$  (abajo) y  $x = 5 - y$  (arriba).

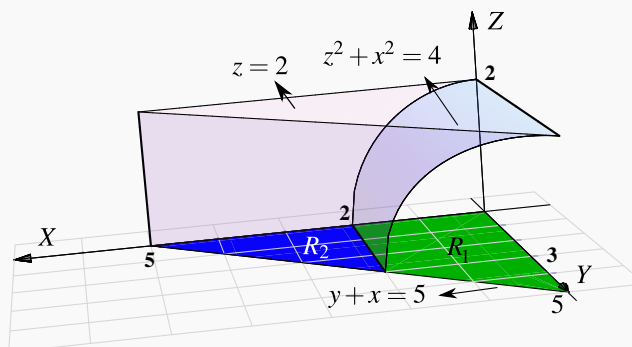
Usando el orden de integración “ $dydz$ ” tenemos

$$V_Q = \int_0^2 \int_0^{5-\sqrt{4-z^2}} (5-y-\sqrt{4-z^2}) dy dz = \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587$$

● **Cálculo de  $V_Q$  proyectando sobre el plano  $XY$ .**

La proyección sobre el plano se muestra en la figura. La ecuación de la curva  $C_3$  corresponde a  $y = 5 - x$  con  $x \in [0, 5]$ . Esta curva divide la región de integración en dos regiones  $R_1$  y  $R_2$ . El sólido  $Q$  está limitado por las superficies

- $z = \sqrt{4 - x^2}$  (abajo) y  $z = 2$  (arriba) sobre  $R_1$
- $z = 0$  (abajo) y  $z = 2$  (arriba) sobre  $R_2$



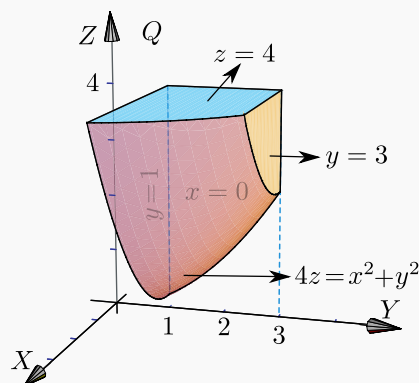
Usando el orden de integración “ $dydx$ ” tenemos

$$\begin{aligned}
 V_Q &= \int_0^2 \int_0^{5-x} 2 - \sqrt{4-x^2} \, dy \, dx + \int_2^5 \int_0^{5-x} 2 - 0 \, dy \, dx \\
 &= \frac{83}{3} - 5\pi \approx 11.9587
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.7

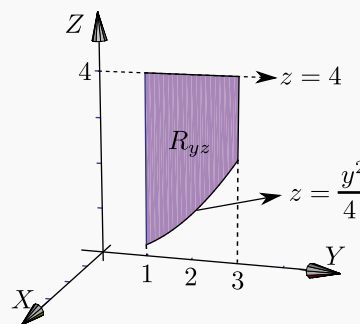
El sólido  $Q$  está limitado por las superficies  $4z = x^2 + y^2$ ,  $y = 3$ ,  $y = 1$ ,  $z = 4$ , y  $x = 0$ .

- Dibuje la región de integración en el plano  $yz$ .
- Plantee la o las integrales correspondientes al volumen del sólido utilizando la proyección del ítem anterior.



**Solución:** La región de integración aparece en la figura.

$$V_Q = \int_1^3 \int_{y^2/4}^4 \sqrt{4z - y^2} - 0 \, dz \, dy$$



## 19

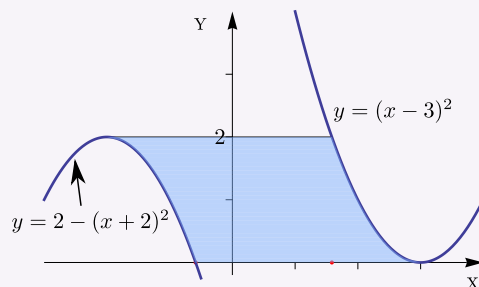
### Ejercicios

**5.1** El área de la región  $R_{xy}$  viene dada por  $\int_0^1 \int_0^y dx \, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} dx \, dy$ . Dibuje la región  $R_{xy}$  y calcule la integral en el orden  $dy \, dx$ .

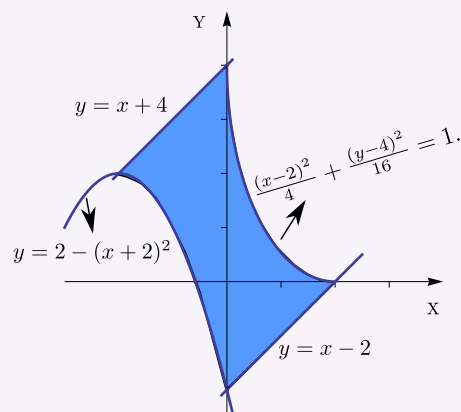
**5.2** Considere la integral  $I = \int_0^4 \int_{4-z}^{8-z^2/2} xy \, dy \, dz + \int_{-4}^0 \int_{4+z}^{8-z^2/2} xy \, dy \, dz$ .

Dibuje la región de integración y plantear la integral  $I$  usando el orden de integración  $dz \, dy$ .

**5.3** Considere la región  $R$  a la derecha. Esta región está limitada por las curvas  $y = 0$ ;  $y = 2$ ;  $y = 2 - (x + 2)^2$  y  $y = (x - 3)^2$ . Plantear la integral  $\iint_R f(x, y) dA$  en el orden “ $dx dy$ ” y en el orden “ $dy dx$ ”

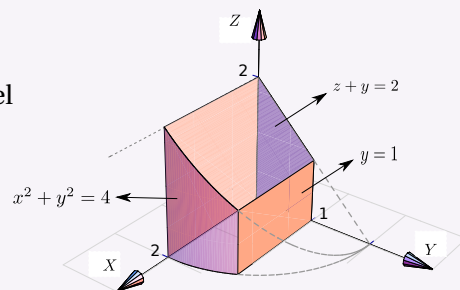


**5.4** Considere la región  $R$  (figura a la derecha). Esta región está limitada por las curvas  $y = x + 4$ ;  $y = x - 2$ ;  $y = 2 - (x + 2)^2$  y  $(x - 2)^2/4 + (y - 4)^2/16 = 1$ . Plantear la integral  $\iint_R f(x, y) dA$  en el orden “ $dx dy$ ” y en el orden “ $dy dx$ ”

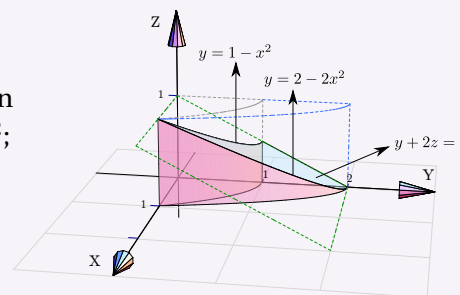


 [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

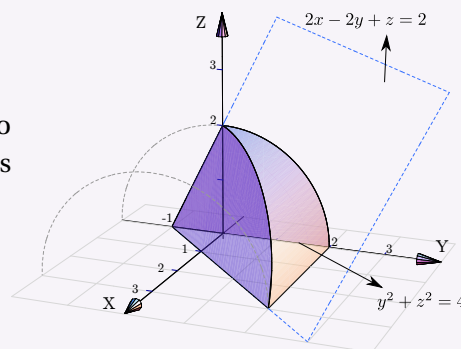
**5.5** Plantear la o las integrales necesarias para calcular el volumen del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $z + y = 2$ ;  $y = 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ , en el I octante



**5.6** Plantear la o las integrales necesarias para calcular el volumen del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por las superficies  $y = 2 - 2x^2$ ;  $y = 1 - x^2$ ;  $y + 2z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ ; en el I octante.

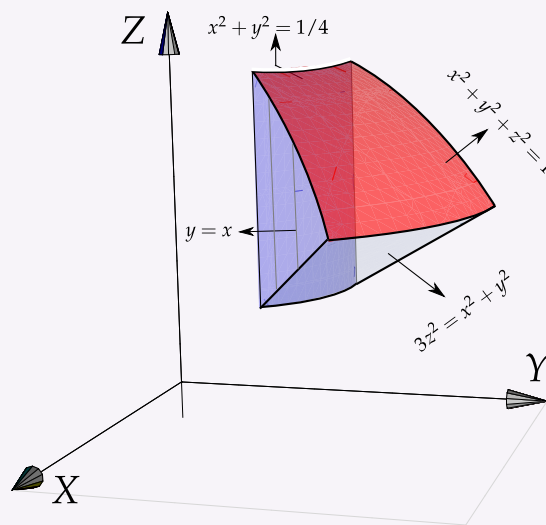


**5.7 Plantear** la o las integrales necesarias para calcular el volumen sólido  $Q$  si este sólido está limitado por la superficie  $y^2 + z^2 = 4$  y los planos  $2x - 2y + z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ .



**5.8** Considere el sólido  $Q$  limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1/4$ , el cono  $3z^2 = x^2 + y^2$ , la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y los planos  $x = 0$  y  $x = y$ ; tal y como se muestra en la figura 5.3.

Plantear la integral (o las integrales) necesarias para calcular el volumen del sólido  $Q$



## 5.4 Cambio de variable en una integral doble.

En una variable, si  $f$  tiene una derivada continua en  $[a, b]$  y  $x = x(u)$  está definida en  $[u_1, u_2]$  con  $a = x(u_1)$  y  $b = x(u_2)$ , y si  $f(x(u))$  es continua en  $[u_1, u_2]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(x(u)) \frac{dx}{du} du \quad (*)$$

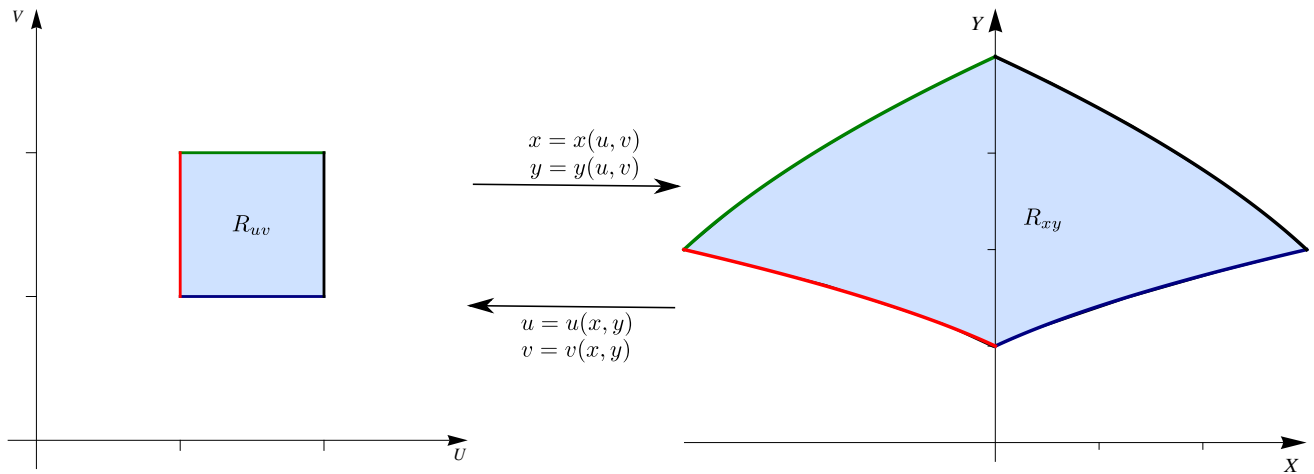
La inversa  $u = u(x)$  existe solo si  $x(u)$  es estrictamente creciente o decreciente, pero no es una condición que se pida en la fórmula (\*).

Hay una fórmula análoga a (\*) para integrales dobles;

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad \text{con} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \mathbf{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Se asume que las funciones  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  están definidas y tienen derivadas parciales continua en la región de integración  $R_{uv}$  en el plano  $uv$ . En este caso si se asume que las funciones inversas  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  están definidas y son continuas en  $R_{xy}$  y que *hay un mapeo invertible entre el interior de  $R_{xy}$  y el interior de  $R_{uv}$* . La función  $f(x, y)$  se asume continua en  $R_{xy}$  y así  $f(x(u, v), y(u, v))$  es continua en  $R_{uv}$ . También se asume que el **Jacobiano**  $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  es no nulo en el interior de  $R_{uv}$ .

La restricción de que el cambio de variable sea invertible en el interior de  $R_{xy}$  (y por tanto que  $J(u, v)$  no se anule en el interior de  $R_{uv}$ ) es necesaria para poder usar cambio de variable con coordenadas polares en regiones que contienen el origen.



### Teorema 5.3 (Cambio de variable).

Sea  $R_{uv}$  una región compacta y conexa en el plano contenida en un conjunto abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\mathbf{r} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , una función continua con derivadas parciales continuas tal que  $\mathbf{r}$  es invertible en el

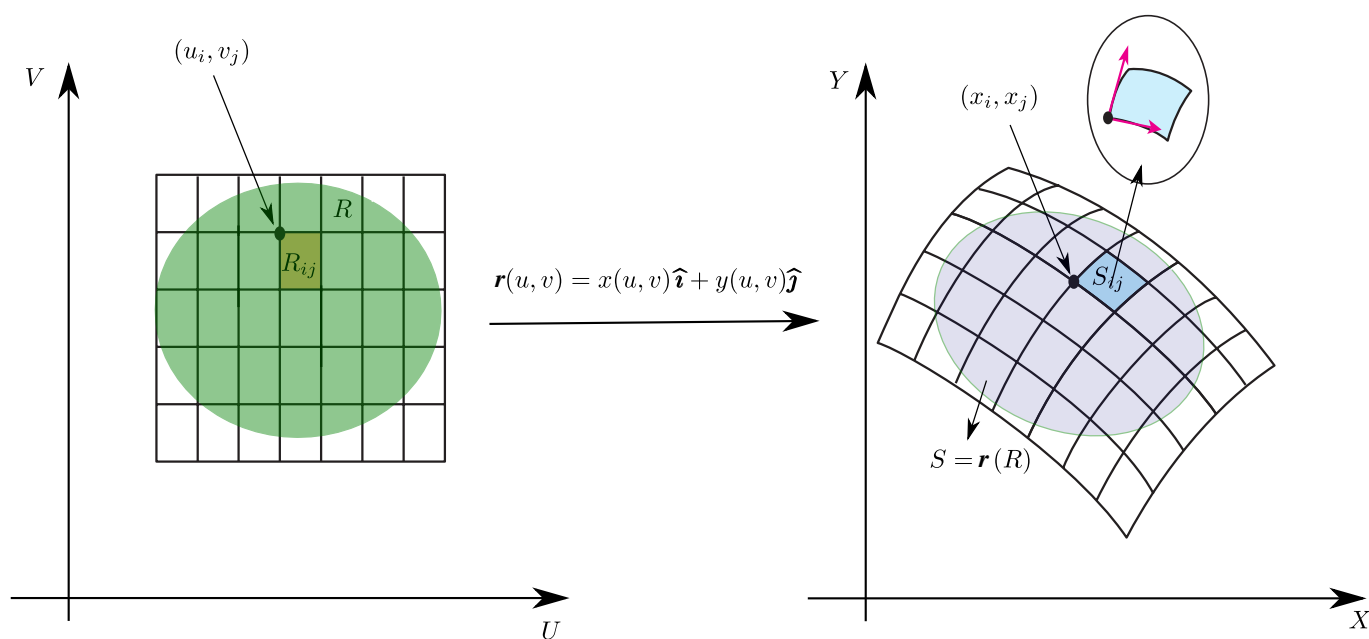
interior de  $R_{uv}$  y  $J(u, v) = \mathbf{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$  es no nulo en el interior de  $R_{uv}$ . Sea  $R_{xy} = \mathbf{r}(R_{uv})$  y  $f : R_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces,

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

**Notas.** Observe que el Jacobiano  $J(u, v)$  va en valor absoluto dentro de la integral. Además solo se requiere que  $\mathbf{r}(u, v)$  sea **invertible en el interior** de  $R_{uv}$  y por tanto  $|J(u, v)|$  no se anule en el interior de  $R_{uv}$ .

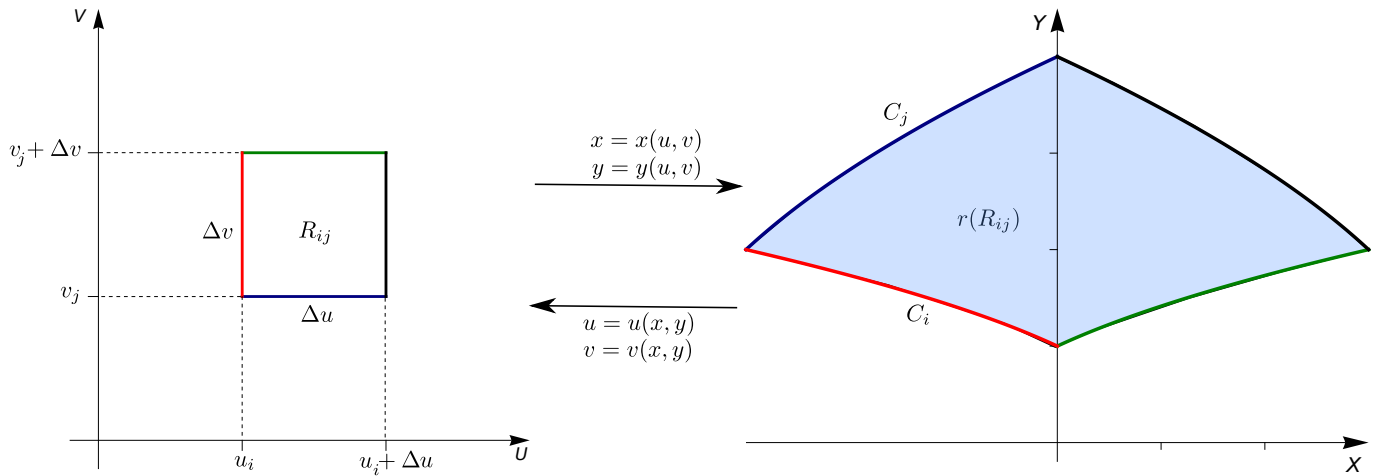
Para verificar que un cambio de variable es invertible en una región uno podría, si se puede, calcular la transformación inversa  $\mathbf{r}^{-1}(x, y)$ . En los ejemplos de este libro es sencillo calcular esta inversa. El 'Teorema de la Función Inversa' solo dice, con las hipótesis respectivas, que si  $J(u_0, v_0)$  no se anula, entonces  $\mathbf{r}(u, v)$  es invertible en un entorno de  $(u_0, v_0)$ , pero no nos da información de si hay una inversa 'global'. Sin embargo en la literatura se encuentran teoremas con condiciones especiales para 'globalizar' el resultado.

**Idea geométrica.** Consideremos el cambio de variable  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  que transforma  $R$  en  $S$  y que cumplen las condiciones del teorema. Este cambio de variable define una función invertible  $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\hat{\mathbf{i}} + y(u, v)\hat{\mathbf{j}}$  en el interior de  $S$  y  $S = \mathbf{r}(R)$ .



Tomemos un rectángulo  $R_{ij}$  de una malla  $M$  de  $R$ .  $\mathbf{r}$  transforma el lado  $u = u_i$  en la curva  $C_i: \mathbf{r}(u_i, v)$ ,  $v \in [v_j, v_j + \Delta v]$  y el lado  $v = v_j$  en la curva  $C_j: \mathbf{r}(u, v_j)$ ,  $u \in [u_i, u_i + \Delta u]$ .

Si además  $\mathbf{r}^{-1}$  es continua,  $\mathbf{r}$  es un homeomorfismo y la frontera del rectángulo  $R_{ij}$  es 'mapeada' en la frontera de  $S = \mathbf{r}(R_{ij})$  y el interior en el interior.



Si  $\mathbf{r}(u_i, v_j) = (x_i, y_j)$ , un vector tangente en  $(x_i, y_j)$  en  $C_i$  es  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v)}{\partial v} \right|_{v=v_j}$ . Como este vector representa la velocidad a la que se desplaza el punto  $\mathbf{r}(u_i, v)$  cuando  $v$  va de  $v_j$  a  $v_j + \Delta v$ , entonces en la curva  $C_i$ ,  $(x_i, y_j)$  se desplaza, en el tiempo  $\Delta v$ , una distancia aproximada  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v)}{\partial v} \right|_{v=v_j} \Delta v$ . Usando el teorema del valor medio para derivadas lo escribimos así,

$$\mathbf{r}(u_i, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u_i, v) \approx \Delta v \mathbf{r}_v$$

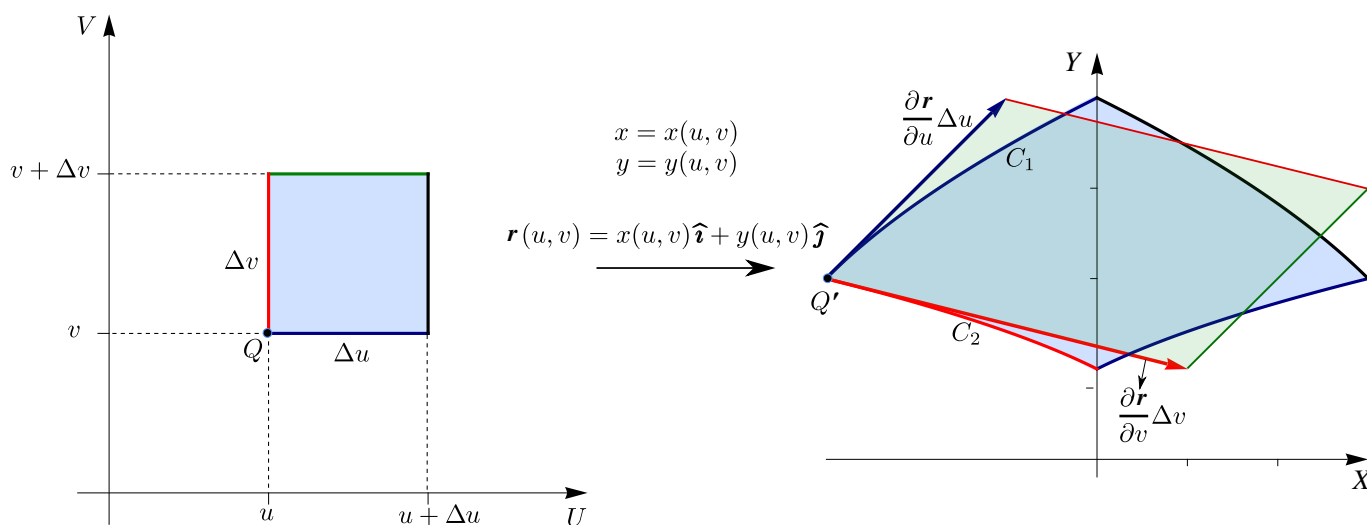
Analogamente, un vector tangente en  $(x_i, y_j)$  en  $C_j$  es  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u, v_j)}{\partial u} \right|_{u=u_i}$ . Como este vector representa la velocidad a la que se desplaza el punto  $\mathbf{r}(u, v_j)$  cuando  $u$  va de  $u_i$  a  $u_i + \Delta u$ , entonces en la curva  $C_j$ ,  $(x_i, y_j)$  se desplaza, en el tiempo  $\Delta v$ , una distancia aproximada  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u, v_j)}{\partial u} \right|_{u=u_i} \Delta u$ .

Por tanto, el rectángulo  $R_{ij}$  en  $R$ , se transforma en una porción del plano  $XY$  que es casi el paralelogramo de lados

$\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v)}{\partial v} \right|_{v=v_j} \Delta v$  y  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}(u, v_j)}{\partial u} \right|_{u=u_i} \Delta u$ . El área de este paralelogramo es, en términos de producto vectorial,

$$\left| \left. \frac{\partial \mathbf{r}(u_i, v)}{\partial v} \right|_{v=v_j} \times \left. \frac{\partial \mathbf{r}(u, v_j)}{\partial u} \right|_{u=u_i} \Delta u \Delta v \right|$$

En la figura que sigue se ilustra esta situación con un punto genérico  $(u, v)$ .



El área del paralelogramo “curvilíneo” es aproximadamente el área del paralelogramo de lados  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$  y  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u$ . El área de este último paralelogramo es

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = |J(u, v)| \hat{\mathbf{k}}$$

De esta manera, si  $J(u, v) = 1$ , el cambio de variable conserva las áreas. Sino, el área de cada paralelogramo en  $XY$  es aproximadamente el área de cada rectángulo en  $UV$ , multiplicada por  $|J(u, v)|$ . Por eso decimos que  $|J(u, v)|$  opera como un factor de compensación por la ‘deformación’ sufrida por la región ante un cambio de variable. Si la integral existe, deberíamos tener

$$A_S = \iint_S 1 \, dx \, dy \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{S_{ij}} \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |J(u, v)|_{u=u_i, v=v_j} \Delta u \Delta v = \iint_R |J(u, v)| \, du \, dv$$

Y en general,

$$A_S = \iint_S f(x, y) \, dx \, dy \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) A_{S_{ij}} \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) |J(u, v)|_{u=u_i, v=v_j} \Delta u \Delta v = \iint_R f(u, v) |J(u, v)| \, du \, dv$$

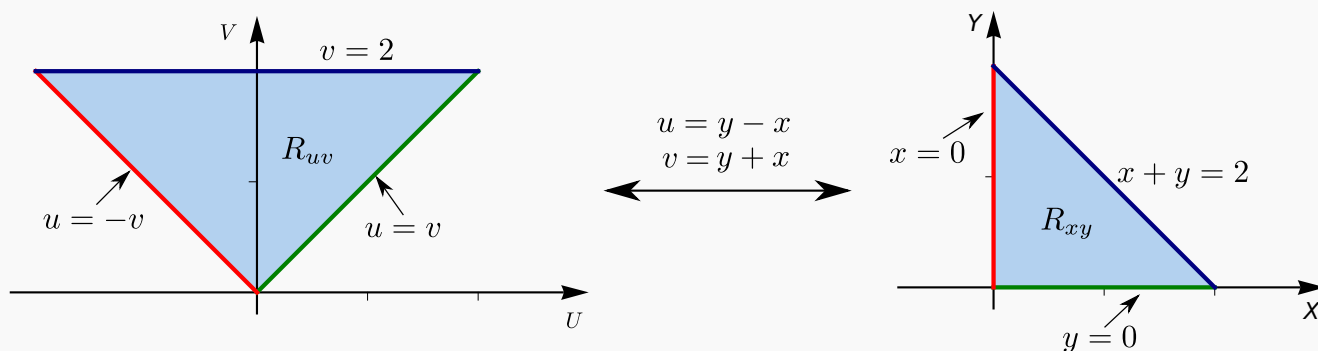


**Ejemplo 5.8**

Calcular  $\iint_{R_{xy}} e^{\frac{y-x}{y+x}} dA$  usando el cambio de variable  $u = y - x$  y  $v = y + x$ . La región  $R_{xy}$  está limitada por las rectas  $x + y = 2$ ,  $x = 0$  y  $y = 0$ .

**Solución:** . Primero debemos dibujar la región de integración  $R_{uv}$  para luego integrar.

**Nueva región de integración.** El cambio de variable es invertible y la inversa es continua, entonces aplicamos el cambio de variable a la frontera de la región  $R_{xy}$  para calcular las curvas frontera de la región  $R_{uv}$ . Como  $v = y + x$ , el segmento de recta  $x + y = 2$  corresponde a  $v = 2$ . Si  $x = 0$  entonces  $u = v$  y si  $y = 0$  entonces  $u = -v$ .



**El cambio de variable es invertible:** Resolviendo  $\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$  obtenemos  $x = \frac{1}{2}(v - u)$  y  $y = \frac{1}{2}(v + u)$ .

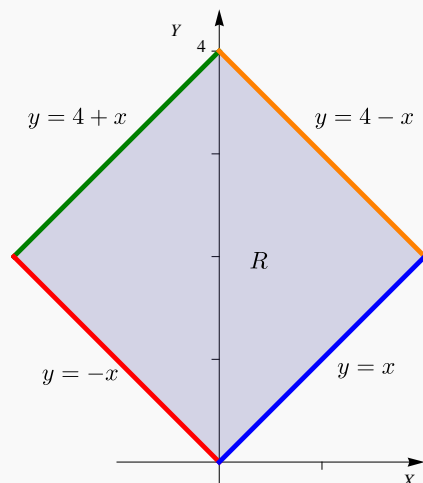
**Calculamos el Jacobiano.**  $J(u, v) = \text{Det} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -1/2$ .

**Cálculo de la integral.**

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} e^{\frac{y-x}{y+x}} dA &= \iint_{R_{uv}} e^{\frac{u}{v}} |J(u, v)| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv \\ &= e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

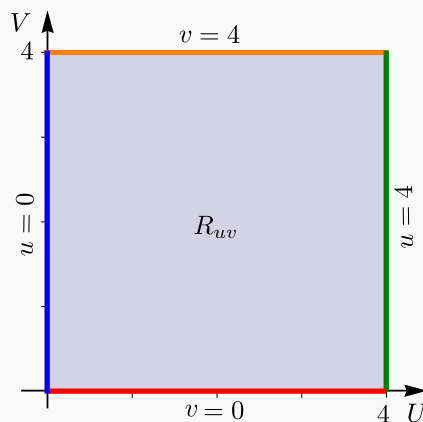
**Ejemplo 5.9**

Calcule  $\iint_{R_{xy}} (y^2 - x^2) e^{(x+y)^2} dA$ , donde  $R_{xy}$  es la región mostrada en la figura. Utilice el cambio de variable  $\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$



**Solución:** Si  $\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$  Entonces  $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v - u) \\ y = \frac{1}{2}(u + v) \end{cases}$

Como la inversa es continua, aplicando el cambio de variable a la frontera de  $R_{xy}$ , obtenemos la frontera de la región  $R_{uv}$ . A  $y = -x + 4$  le corresponde, sustituyendo  $x$  e  $y$ ,  $v = 4$ . A  $y = -x$  le corresponde  $v = 0$  y a  $y = x + 4$  le corresponde  $u = 4$ . La nueva región es más simple.



$$\iint_{R_{xy}} (y^2 - x^2) e^{(x+y)^2} dA = \int_0^4 \int_0^4 u v e^{v^2} dv du = 4 \cdot e^{16} - 4.$$

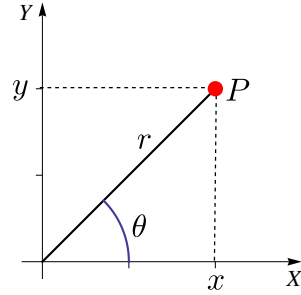
Como se ve en los ejemplos anteriores, en la práctica se usa el cambio de variable en la forma  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  tanto como  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Siempre hay que estar al tanto de que se cumplan las hipótesis, en particular la invertibilidad.

**5.5 Coordenadas Polares.**

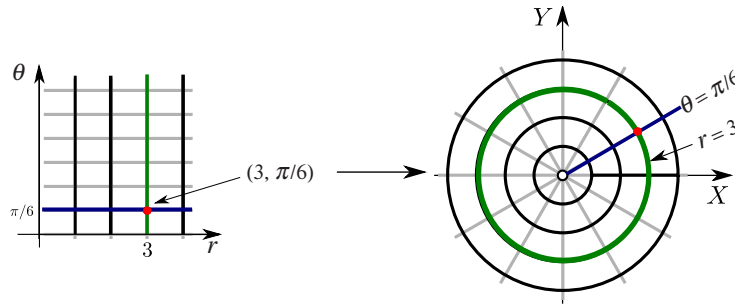
Este cambio de variable es muy útil cuando la región de integración tiene fronteras a lo largo de las cuales  $r$  y  $\theta$  son constantes (como en círculos centrados en el origen). Primero un pequeño repaso. (Ver apéndice 8.2).

Un punto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  se puede especificar en **coordenadas polares**  $(r, \theta)$  donde  $r$  es la distancia del origen a  $P$  y  $\theta$  es el ángulo medido desde el eje  $X$  contrareloj. La conversión de coordenadas polares a coordenadas cartesianas se hace con la transformación

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (*)$$



Para efectos de cambio de variable, esta transformación es invertible si  $r > 0$  y si  $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ . Podemos definir la inversa desde  $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$  a  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\theta$  el único ángulo  $\theta \in [0, 2\pi[$  que satisface (\*), es decir  $\theta = \arctan(y/x)$  si  $x > 0$  y  $\theta = \arctan(y/x) + \pi$  si  $x < 0$  pues  $\arctan(t)$  está definida en  $]-\pi/2, \pi/2[$  (si  $r = 0$ , el cambio de variable aplica todo el eje  $\theta$  en el origen  $(0, 0)$ .)

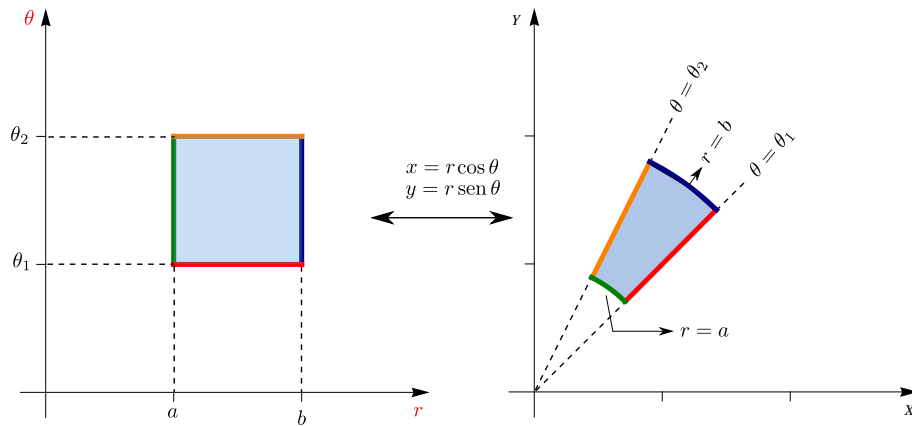


Poniendo  $u = r$  y  $v = \theta$  tenemos el cambio de variable,

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

En este caso,

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$



Como ya indicamos, este cambio de variable es invertible si  $r > 0$  y si  $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$  (a veces es cómodo tomar ángulos negativos).

Si en  $R$  y  $R'$  se cumplen las condiciones del teorema de cambio de variable, entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

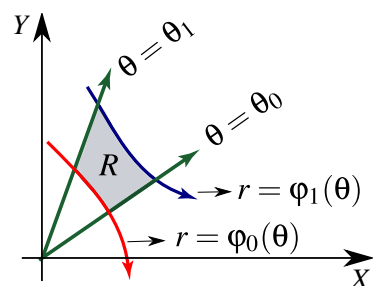
- En el caso de coordenadas polares, la nueva región  $R_{r\theta}$  se puede describir en el mismo sistema  $XY$ .

- Si una región  $R$  se puede describir como una región en coordenadas polares tal que

$$0 < \varphi_0(\theta) \leq r \leq \varphi_1(\theta) \text{ si } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\varphi_0(\theta)}^{\varphi_1(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

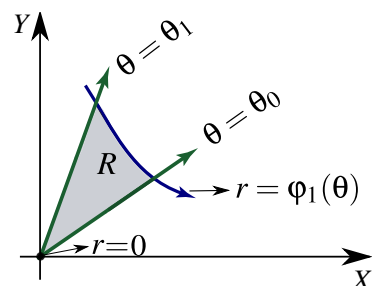


- Si una región  $R$  se puede describir como una región en coordenadas polares tal que

$$0 \leq r \leq \varphi_1(\theta) \text{ si } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_0^{\varphi_1(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$



**Nota.** En este caso, el cambio de variable es invertible en el interior de la región ( $r > 0$ ) y además aquí el Jacobiano no se anula, así que no afecta que  $r = 0$ .

**Ejemplo 5.10**

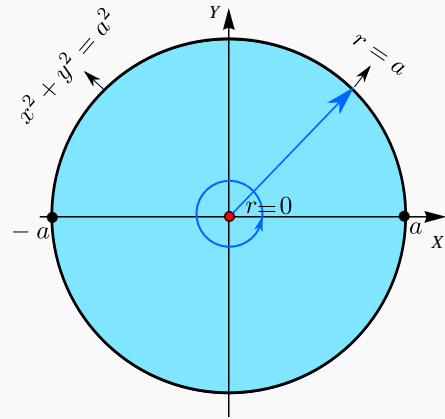
Calcular el área  $A_c$  del círculo de radio  $a$ .

**Solución:** Para este cálculo podemos usar un círculo de radio  $a$ , centrado en el origen. La circunferencia del círculo tiene ecuación cartesiana  $x^2 + y^2 = a^2$ . Para obtener la ecuación en polares, sustituimos  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  y despejamos  $r$ :

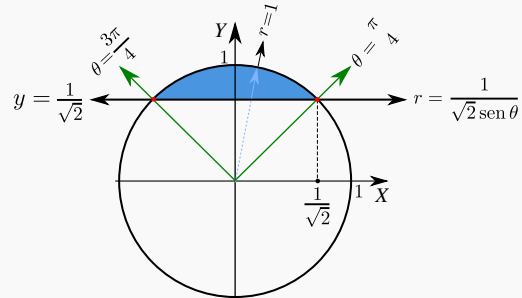
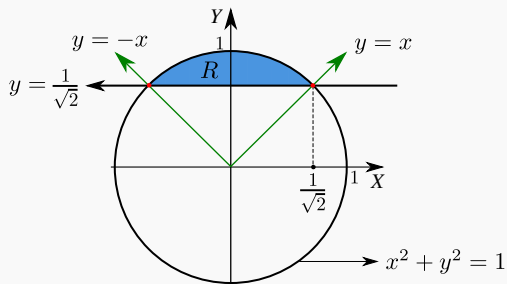
$$x^2 + y^2 = a^2 \implies (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2 \implies r^2 = a^2.$$

Así, en coordenadas polares, la región de integración va desde  $r = 0$  hasta  $r = a$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

$$A_c = \iint_R 1 \cdot dA = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} d\theta = \frac{a^2}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2$$

**Ejemplo 5.11**

Considere la región  $R$  de la figura. Para calcular el área  $A_R$  de la región  $R$ , usando coordenadas polares, debemos hacer el cambio de variable  $x = r \cos(\theta)$  y  $y = r \sin(\theta)$ .



Observe que

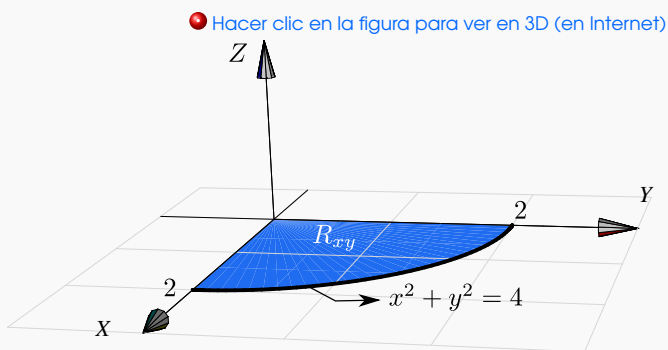
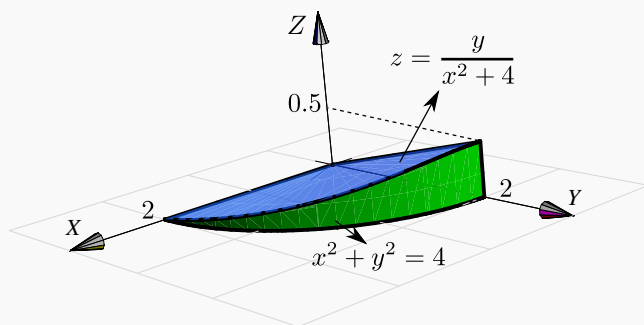
- La recta  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$  se transforma en  $r \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies r = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\theta)}$ .
- La circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  se transforma en  $r = 1$ .
- La recta  $y = x$  se transforma en  $\theta = \pi/4$ . En efecto,  $y = x \implies \cos \theta = \sin(\theta) \implies \theta = \pi/4$ . Esto, por supuesto, también lo podemos establecer de manera geométrica.

$$\begin{aligned}
 A_R &= \iint_R 1 \cdot dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta)}}^1 r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{r^2}{2} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta)}}^1 d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sin^2(\theta)} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\csc^2(\theta) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\cot(\theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi-2}{4}
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.12 (Volumen)

Plantear una integral, en polares, para calcular el volumen del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $z = \frac{y}{x^2+4}$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  y  $z = 0$  con  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$ .

**Solución:** El sólido y su proyección sobre el plano  $XY$  se ven en la figura.



● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Pasando a coordenadas polares tenemos

$$V_Q = \iint_R \left( \frac{y}{x^2+4} - 0 \right) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \frac{r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + 4} r \, dr \, d\theta$$

**Nota:** Esta última integral se puede calcular observando que

- $\int x \arctan(x) dx = \frac{1}{2} (-x + (1+x^2) \arctan x)$ , salvo constantes.
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 f(r, \theta) dr d\theta = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} f(r, \theta) d\theta dr$ , pues estamos integrando sobre un rectángulo.

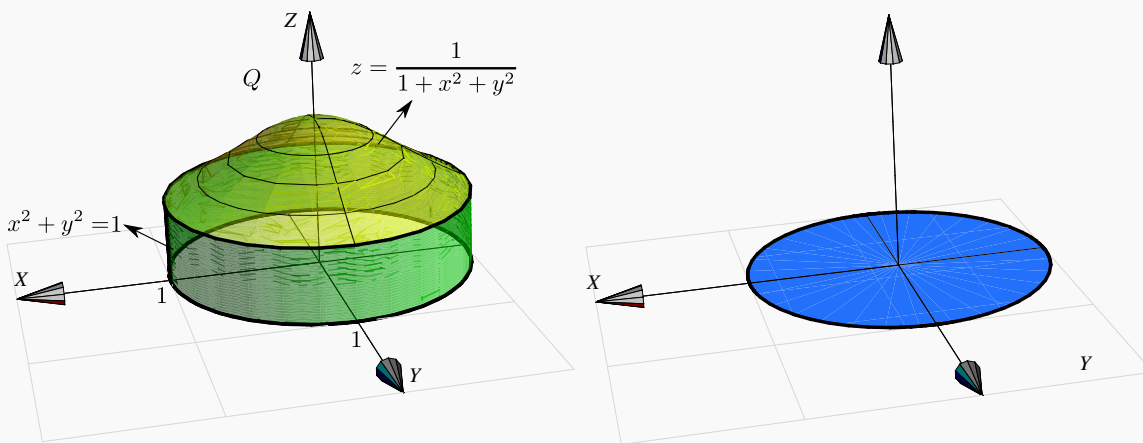
Veamos,

$$\begin{aligned}
 V_Q &= \iint_R \frac{y}{x^2+4} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \frac{r^2 \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + 4} dr d\theta \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{r^2 \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + 4} d\theta dr = \int_0^2 \int_0^1 \frac{r^2}{4 + r^2 u^2} du dr, \text{ (haciendo } u = \cos \theta). \\
 &= \int_0^2 \int_0^1 \frac{r}{2} \frac{r/2}{1 + (ru/2)^2} du dr = \int_0^2 \frac{r}{2} \arctan(ru/2) \Big|_0^1 dr = \int_0^2 \frac{r}{2} \arctan(r/2) dr \\
 &= 2 \int_0^1 x \arctan(x) dx = \frac{1}{2}(\pi - 2).
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.13** (Volumen).

Calcule el volumen del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ ,  $x^2+y^2=1$  y  $z=0$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Solución:**

El sólido y su proyección sobre el plano  $XY$  se ven en la figura. El sólido  $Q$  está limitado por  $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$  y  $z=0$ . Aplicando coordenadas polares (y como no hay singularidades) tenemos

$$V_Q = \iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln(2) d\theta = \pi \ln(2)$$

### Ejemplo 5.14

Calcule  $\iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dA$  si  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

**Solución:** La región  $R$  es la parte del círculo de radio 1, centrado en el origen, que está en el primer octante. Aquí usamos el hecho de que  $\int_a^b \int_p^q f(\theta)g(r) dr d\theta = \int_a^b f(\theta) d\theta \cdot \int_p^q g(r) dr$ .

$$\iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{r^3 \cos \theta \sen \theta}{(1+r^2)^2} dr d\theta$$

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dA &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sen \theta d\theta \cdot \int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{4r^3 + 4r}{1+2r^2+r^4} dr - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2r}{(1+r^2)^2} dr \\ &= \frac{1}{8} \ln|1+2r^2+r^4| \Big|_0^1 + \frac{1}{4} \frac{1}{1+r^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \ln 4 - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

**Tangentes al Polo.** A veces es útil calcular las tangentes al Polo (incluidas tangentes al Polo verticales y horizontales) para establecer los límites de integración de las regiones limitadas por una curva en coordenadas polares.

Sea  $C$  una curva de ecuación  $r = f(\theta)$  con  $f$  una función derivable. Si la gráfica de  $C$  pasa por el Polo cuando  $\theta = \alpha$  entonces  $f(\alpha) = 0$ .

Supongamos que cuando  $\theta = \alpha$ , también tenemos una tangente no horizontal a  $C$  en el Polo, es decir,  $f'(\alpha) \neq 0$ . La ecuación de esta recta tangente es  $y = mx$  con  $m = \tan \alpha$  (pues pasa por el origen). Esto es así porque como

$$x = f(\theta) \cos \theta$$

$$y = f(\theta) \sen \theta$$



Entonces, las pendientes de las tangentes vienen dadas por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta} \quad (\text{cuidado: La pendiente de la tangente no es } f'(\theta))$$

Así, evaluando en  $\theta = \alpha$

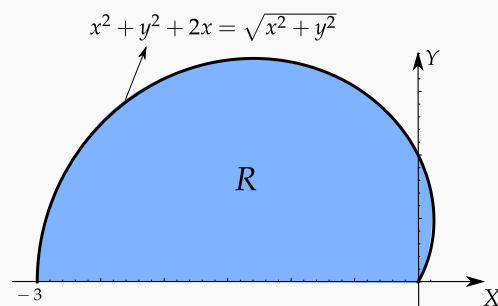
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\alpha} = \frac{f'(\alpha) \operatorname{sen} \alpha + f(\alpha) \cos \alpha}{f'(\alpha) \cos \alpha - f(\alpha) \operatorname{sen} \alpha} = \tan \alpha \quad \text{si } f(\alpha) = 0 \text{ y } f'(\alpha) \neq 0.$$

### Tangentes y Tangentes al Polo

- La línea  $\theta = \alpha$  es una *tangente al polo* en la gráfica de la curva  $C$  si  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) \neq 0$
- La línea  $\theta = \alpha$  es una *tangente al polo* vertical, en la gráfica de la curva  $C$ , si  $f(\alpha) = 0$  y  $\left. \frac{dy}{dx} \right| \rightarrow \infty$  si  $\theta \rightarrow \alpha$
- La línea  $\theta = \alpha$  es una *tangente al polo* horizontal, en la gráfica de la curva  $C$ , si  $f(\alpha) = 0$  y  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,\alpha)} = 0$ .
- También puede pasar que la derivada solo exista como un límite unilateral o que  $dy/dx$  se tenga que calcular como una forma indeterminada en el caso de que  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) = 0$ .

### Ejemplo 5.15 (Tangentes al Polo)

Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región  $R$  tal y como se muestra en la figura.

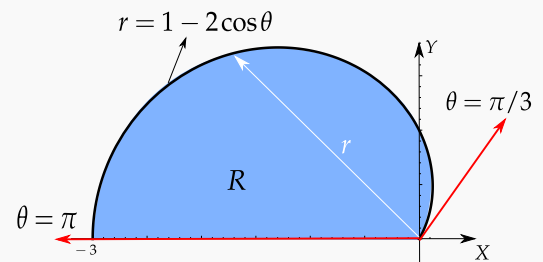


**Solución:** La ecuación de la curva es  $x^2 + y^2 + 2x = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Como  $r^2 = x^2 + y^2$ , haciendo la conversión a coordenadas polares obtenemos la ecuación  $r^2 + 2r \cos \theta = r$ , es decir,

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

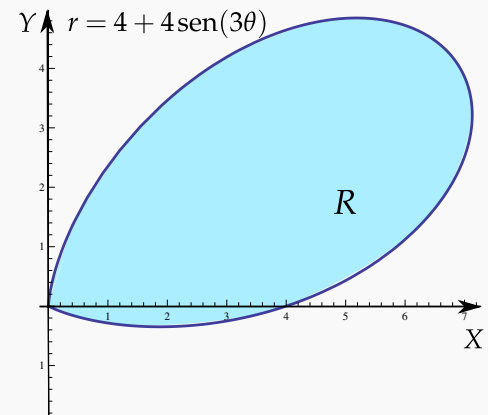
**Tangentes al polo:**  $r = 0 \implies 1 - 2 \cos \theta = 0 \implies \theta = \pm \pi/3$  en  $[0, 2\pi]$  y  $r'(\pi/3) \neq 0$ . Así, la región está entre los rayos  $\theta = \pi/3$  y  $\theta = \pi$ . Entonces,

$$\begin{aligned} A_R &= \iint_R 1 \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi} \int_0^{1-2\cos\theta} 1 \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} (2\pi - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$



### Ejemplo 5.16 (Tangentes al Polo)

Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región  $R$  tal y como se muestra en la figura.



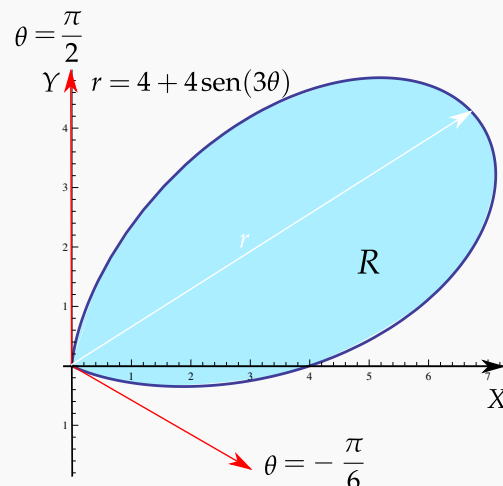
**Solución:** La ecuación de la curva es  $r = 4 + 4 \sin 3\theta$ .

### Tangentes al polo:

$r = 0 \Rightarrow 4 + 4 \sin 3\theta = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ . Las soluciones que nos sirven son  $\theta = -\frac{\pi}{6}$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Como tenemos la figura, podemos ver visualmente que estos son los límites de integración adecuados.

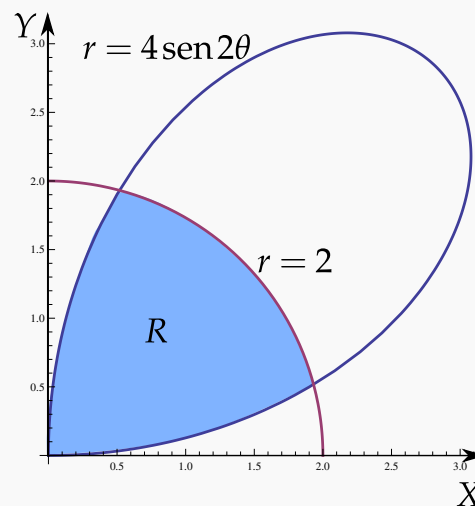
Observe que  $r'(-\pi/6) = 0$  y que  $r'(\pi/2) = 0$ , usando la regla de L'Hospital se obtiene que  $\frac{dy}{dx} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}$  si  $\theta \rightarrow -\pi/6$  y que  $\left|\frac{dy}{dx}\right| \rightarrow \infty$  si  $\theta \rightarrow \pi/2$ , lo cual es consistente con lo que se observa en la figura.

$$A_R = \iint_R 1 \cdot r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{4+4\sin\theta} 1 \cdot r \, dr \, d\theta = 8\pi$$



### Ejemplo 5.17 (Tangentes al Polo)

Calcule, usando coordenadas polares, el área de la región  $R$  tal y como se muestra en la figura.



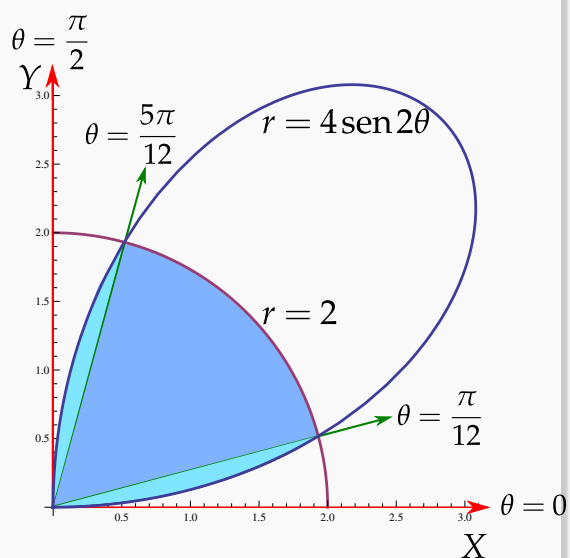
**Solución:** La región está entre las curvas  $r = 2$  y  $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ . Esto nos da tres subregiones: desde el origen hasta la curva  $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$  y desde el origen hasta la curva  $r = 2$ .

**Tangentes al polo:**  $r = 0 \Rightarrow r = \operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Como tenemos la figura, podemos ver visualmente que  $\theta = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$  corresponden a una tangente horizontal y otra vertical (como  $r'(0) \neq 0$ , la primera recta tiene pendiente  $m = \tan 0 = 0$  y la segunda recta es una recta vertical).

**Límites de integración:** Para obtener los límites de integración de las tres subregiones, buscamos la intersección entre las curvas:  $r = 2 \cap r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ , es decir,

$$2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} \text{ y } \theta = \frac{5\pi}{12}.$$

$$A_R = \iint_R 1 \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi/12} \int_0^{4 \operatorname{sen} 2\theta} 1 \cdot r \, dr \, d\theta + \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \int_0^2 1 \cdot r \, dr \, d\theta + \int_{5\pi/12}^{\pi/2} \int_0^{4 \operatorname{sen} 2\theta} 1 \cdot r \, dr \, d\theta \approx 2.45674$$



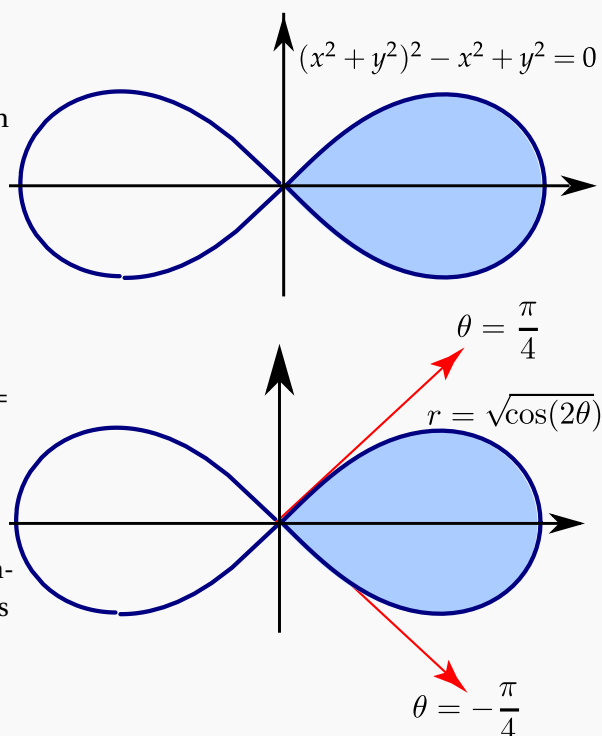
### Ejemplo 5.18

Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación  $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ ,  $x \geq 0$  (región celeste en la figura).

**Solución:** Haciendo el cambio de variable  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \operatorname{sen} \theta$  y sustituyendo en  $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ , obtenemos

$$(r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta))^2 - r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = 0$$

Simplificando queda  $r^2 = \cos(2\theta)$ , que es la ecuación de la lemniscata. Como  $x \geq 0$  entonces la mitad de la lemniscata que nos interesa es  $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ .



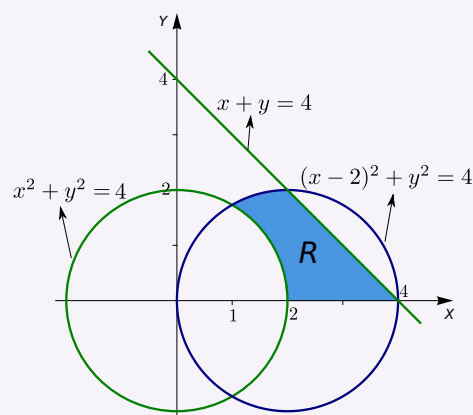
**Tangentes al Polo:**  $r = 0 \Rightarrow \sqrt{\cos(2\theta)} = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{4}$ . Como tenemos la figura, podemos ver que estos rayos corresponden a los límites integración (Usando regla de L'Hospital se puede establecer que  $|dy/dx| = 1$  si  $\theta \rightarrow \pm \pi/4$ ).

Luego, el área de la región es  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r dr d\theta = 1/2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta) d\theta = 1/2$ .

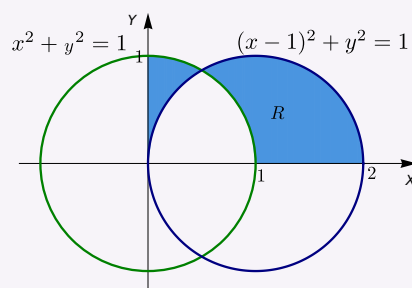
## 20

## Ejercicios

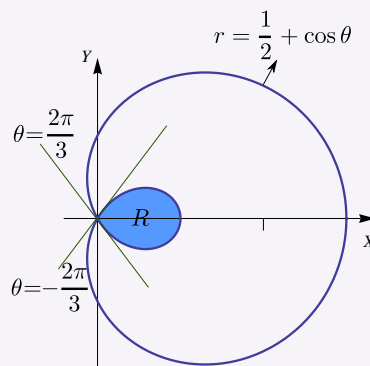
**5.9 Plantear** la o las integrales necesarias para calcular  $\iint_R \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dA$ . La región  $R$  es la región limitada por los círculos  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  y las rectas  $x + y = 4$ ,  $y = 0$ , como se muestra en la figura.



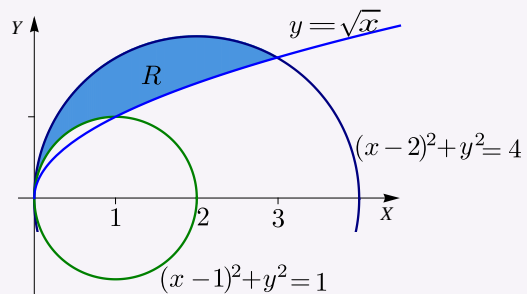
**5.10 Plantear** la o las integrales necesarias para calcular el área de la región  $R$  limitada por las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1$  y  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ .



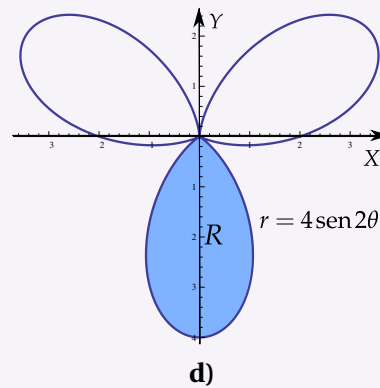
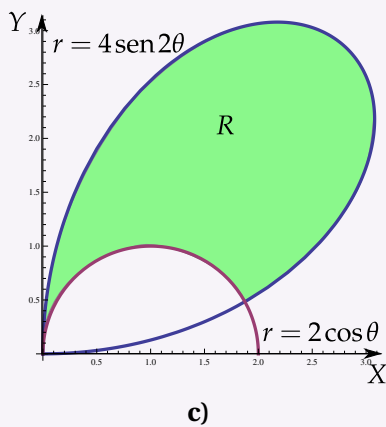
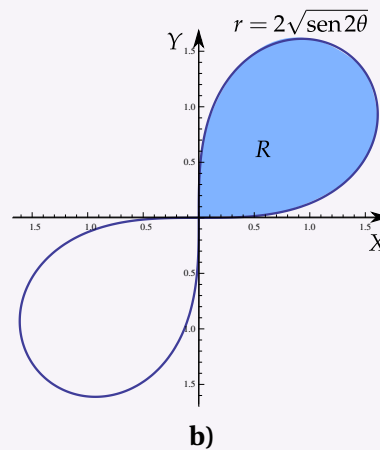
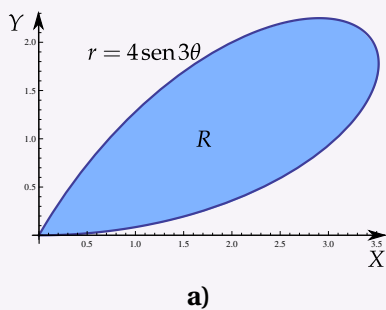
**5.11** Calcular el área de la región limitada por el lazo de la curva  $r = 1/2 + \cos\theta$ . **Ayuda:** Notar que el lazo tiene ecuación  $r = 1/2 + \cos\theta$ ,  $2\pi/3 \leq \theta \leq 4\pi/3$ .



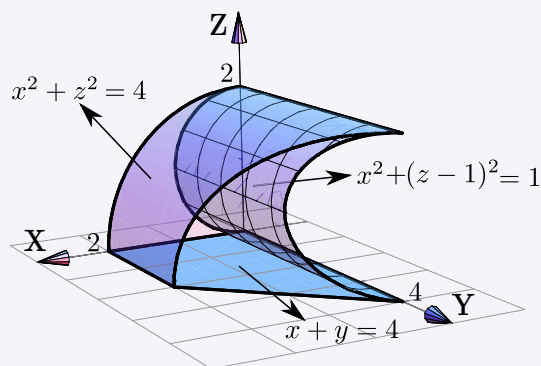
**5.12** Utilizando coordenadas polares, **plantear** la o las integrales que permiten calcular el área de la región  $R$  (región sombreada) mostrada en la figura.



**5.13** Calcular el área de las regiones sombreadas.

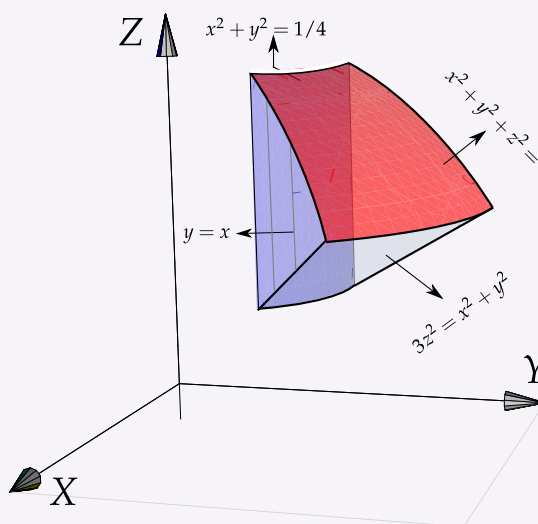


**5.14** Calcule el volumen del sólido  $Q$  limitado por las superficies  $x^2 + z^2 = 4$ ,  $x^2 + (z-1)^2 = 1$  y  $x = 4 - y$ , en el primer octante; como se muestra en la figura. **Ayuda:** Proyectar sobre  $XZ$  y usar coordenadas polares.

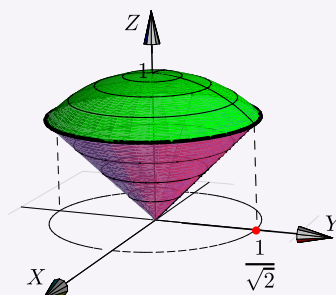


**5.15** Considere el sólido  $Q$  limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1/4$ , el cono  $3z^2 = x^2 + y^2$ , la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y los planos  $x = 0$  y  $x = y$ ; tal y como se muestra en la figura

Calcular el volumen del sólido  $Q$



**5.16** Calcule, usando coordenadas polares, el volumen del sólido  $Q$  limitado por el cono  $z^2 = x^2 + y^2$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .



**5.17** Usando el cambio de variable  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$ ; calcular  $I = \iint_T xy \, dA$  donde  $T$  es el rectángulo de vértices  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 3)$  y  $(1, 3)$ .

**5.18** Calcule  $\iint_T e^{(x+y)/(x-y)} \, dA$  usando el cambio de variable  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ ; donde  $T$  es el trapecio de vértices  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, -2)$  y  $(0, -1)$ .

**5.19** Calcule  $\iint_T \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \, dA$  donde  $T$  es el trapecio de vértices  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  y  $(0, 1)$ . **Ayuda:** Usar

cambio de variable  $u = y - x$ ,  $v = y + x$ .

**5.20** Calcule  $\iint_T xy dA$  donde  $T$  es la región limitada por  $y = x$ ,  $y = 3x$ ,  $xy = 1$  y  $xy = 3$ ; en el primer cuadrante. Use el cambio de variable  $x = u/v$  y  $y = v$ .

## 5.6 Integral triple.

Consideremos un cubo  $Q$  como el de la figura a la derecha. Su volumen es  $V_Q = abc$ . Si la densidad  $\rho$  es constante en todo el cubo, la masa viene dada por

$$M_Q = \rho V_Q$$

Si la densidad no es constante y  $\rho = \rho(x, y, z)$ , entonces para obtener una aproximación de la masa, dividimos  $Q$  en  $N$  cubos  $Q_i$  de volumen

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

Así, la densidad en el punto  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  es

$$\Delta M_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

La masa total del cubo  $Q$  sería,

$$M \approx \sum_{i=1}^N \Delta M_i = \sum_{i=1}^N \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

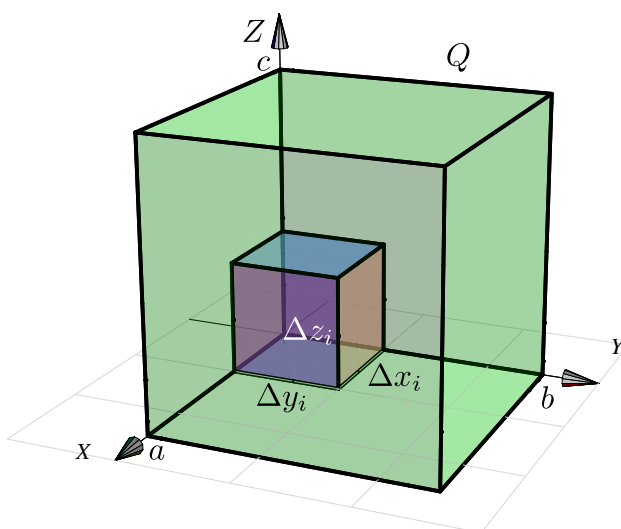
Ahora, tomando el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  (si existe), obtenemos

$$M = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Esto es muy parecido a la integral de Riemann que definimos al principio de este capítulo. En realidad podemos reemplazar la malla  $M_R$  por  $M_Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$  y definir la integral triple de Riemann de una función  $f(x, y, z)$  sobre una región tridimensional  $Q$  como

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \lim_{\|M_Q\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{C(M_Q)} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

Los teoremas para integral doble se extienden de manera natural a la integral triple.



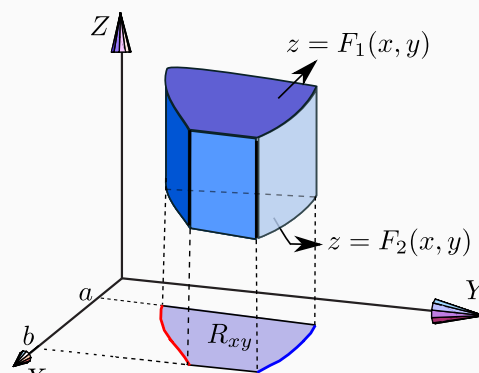


**(Integral Triple).**

Sea  $Q$  un sólido limitado por superficies suaves de ecuación  $z = F_1(x, y)$  (abajo) y  $z = F_2(x, y)$  ( $F_1, F_2$  con derivadas parciales continuas) y con su proyección  $R_{xy}$  limitada por funciones con derivadas continuas. Si  $f(x, y, z)$  es continua sobre  $Q$ , entonces

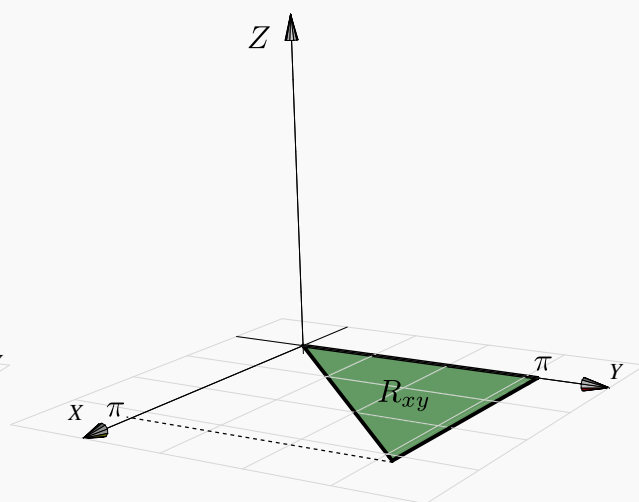
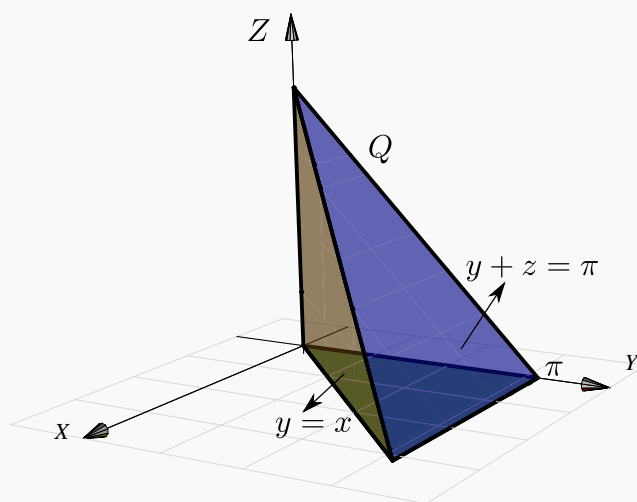
$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xy}} \left[ \int_{F_1(x, y)}^{F_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy dx$$

En particular,  $V_Q = \iint_{R_{xy}} \int_{F_1(x, y)}^{F_2(x, y)} 1 dz dy dx$

**Ejemplo 5.19**

Calcular  $\iiint_Q x \cos(y + z) dV$  con  $Q$  el sólido limitado por  $y + z = \pi$ ,  $y = x$ ,  $x = z = 0$

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



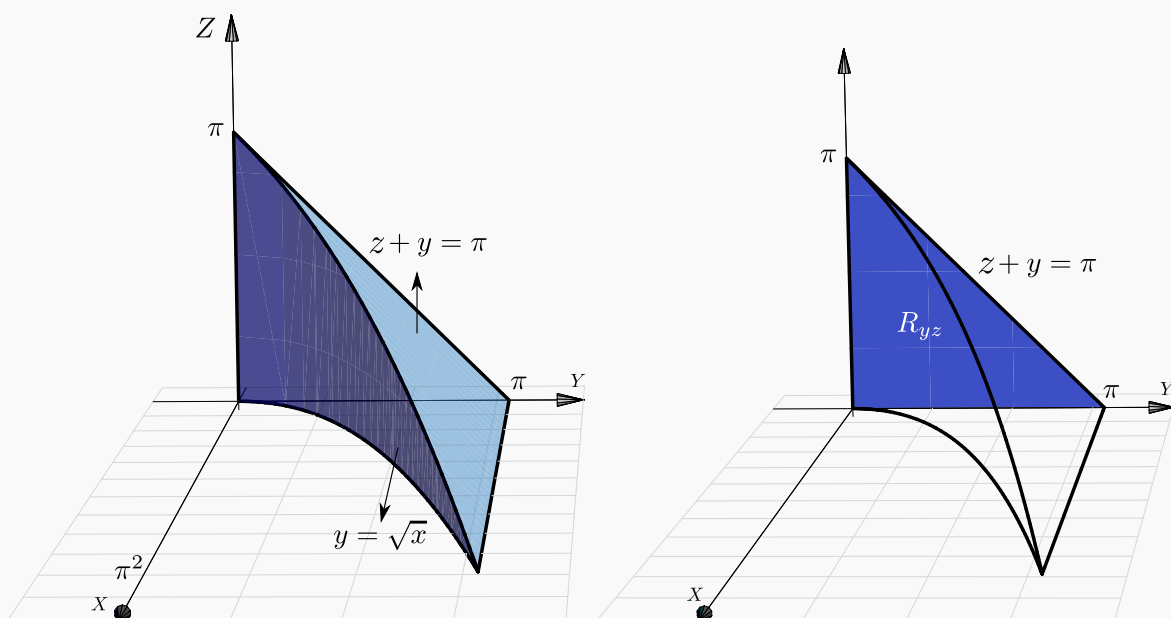
**Solución:** Para calcular esta integral triple vamos a necesitar la integral  $\int x \cos x dx = \cos x + x \operatorname{sen} x + K$  (se calcula “por partes”). El sólido  $Q$  está entre las superficies  $z = 0$  y  $z = \pi - y$ .

$$\begin{aligned}
 \iiint_Q x \cos(y+z) dV &= \int_0^\pi \int_x^\pi \left[ \int_0^{\pi-y} x \cos(y+z) dz \right] dy dx \\
 &= \int_0^\pi \int_x^\pi x \sin(y+z) \Big|_0^{\pi-y} dy dx = \int_0^\pi \int_x^\pi -x \sin(y) dy dx = 2 - \frac{\pi^2}{2}
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.20

Calcular, usando el orden “ $dx dz dy$ ”,  $I = \iiint_Q 2x \cos(y+z) dV$  con  $Q$  el sólido limitado por las superficies (ver figura)  $y+z=\pi$ ,  $y=\sqrt{x}$ ,  $x=z=0$

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



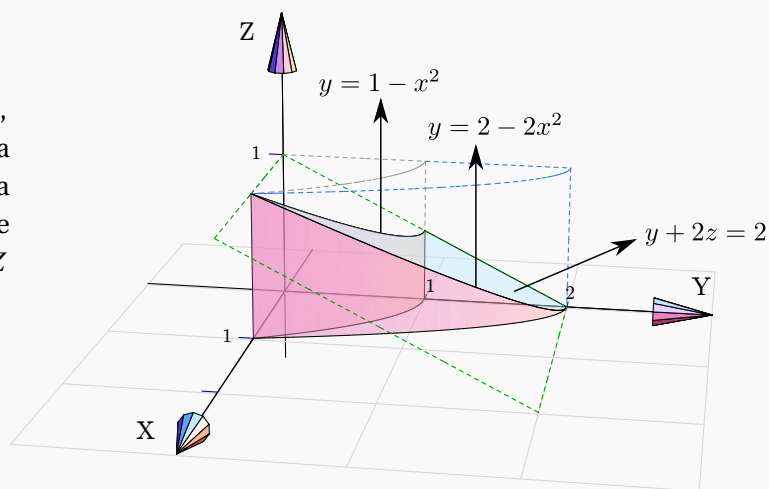
**Solución:** Por el orden de integración que se pide, debemos proyectar sobre el plano  $YZ$ .

Usaremos las integral  $\int y^4 \sin y dy = -(24 - 12y^2 + y^4) \cos y + 4y(-6 + y^2) \sin y + K$ , que se calcula “por partes”. El sólido  $Q$  está entre  $x=0$  y  $x=y^2$ .

$$\begin{aligned}
 \iiint_Q 2x \cos(y+z) dV &= \int_0^\pi \int_0^{\pi-y} \left[ \int_0^{y^2} 2x \cos(y+z) dx \right] dz dy \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\pi-y} x^2 \cos(y+z) \Big|_0^{y^2} dz dy \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\pi-y} y^4 \cos(y+z) dz dy \\
 &= \int_0^\pi y^4 \sin(y+z) \Big|_0^{\pi-y} dy \\
 &= \int_0^\pi -y^4 \sin(y) dy = -48 + 12\pi^2 - \pi^4
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.21**

Considere el sólido  $Q$  limitado por  $z = 0$ ,  $y + 2z = 2$ ,  $x = 0$  y  $y = 1 - x^2$  tal y como se muestra en la figura. Usando integral triple, *Plantear* la integrales necesarias para calcular el volumen de  $Q$  proyectando en cada uno de los planos  $XY$ ,  $YZ$  y  $XZ$

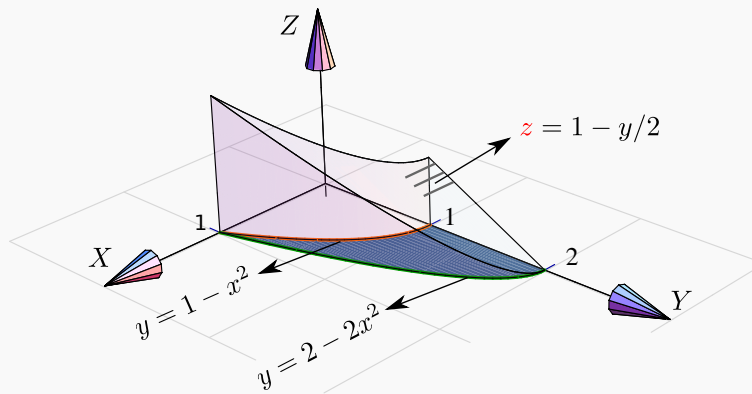


● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Solución:**

**Proyectando sobre  $XY$ .** La región de integración  $R_{xy}$  está entre las curvas  $y = 1 - x^2$  y  $y = 2 - 2x^2$  y en esta región el sólido está entre  $z = 0$  y  $z = 1 - y/2$ .

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

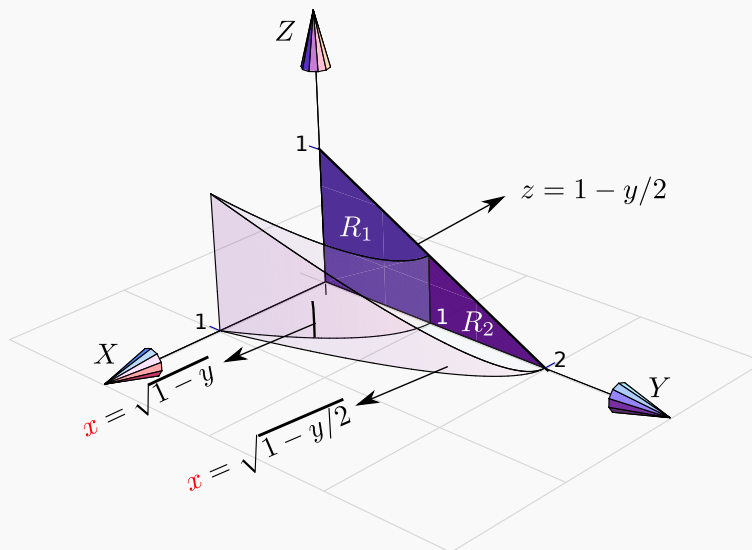


$$V_Q = \int_0^1 \int_{1-x^2}^{2-2x^2} \left[ \int_0^{1-y/2} 1 \, dz \right] dy \, dx$$

**Proyectando sobre  $YZ$ .** La región de integración es  $R_{yz} = R_1 + R_2$ . La región  $R_1$  está entre las rectas  $z = 0$  y  $z = 1 - y/2$  y el sólido está entre  $x = \sqrt{1-y}$  y  $x = \sqrt{1-y/2}$ .

La región  $R_2$  está entre las rectas  $z = 0$  y  $z = 1 - y/2$  y en esta región el sólido está entre  $x = 0$  y  $x = \sqrt{1-y/2}$ .

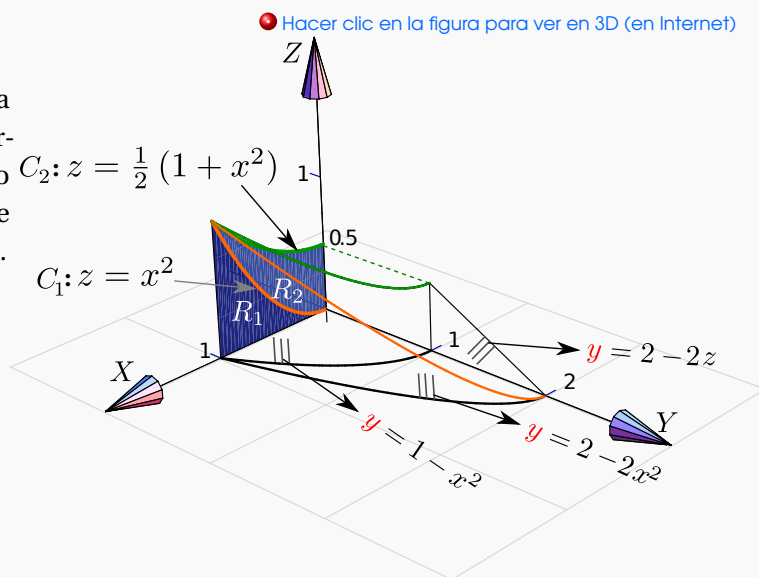
[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_0^{1-y/2} \left[ \int_{\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y/2}} 1 \, dx \right] dz \, dy \\ &+ \int_1^2 \int_0^{1-y/2} \left[ \int_0^{\sqrt{1-y/2}} 1 \, dx \right] dz \, dy \end{aligned}$$

**Proyectando sobre  $XZ$ .**  $R_{xz} = R_1 + R_2$ . La curva  $C_1$  que divide ambas regiones es la curva de intersección entre  $y = 2 - 2z$  y  $y = 2 - 2x^2$ . Igualando obtenemos  $C: z = x^2$ . La curva  $C_2$  se obtiene como la intersección de  $y = 1 - x^2$  y  $y = 2 - 2z$ . Entonces  $C_2: z = (1 + x^2)/2$ .

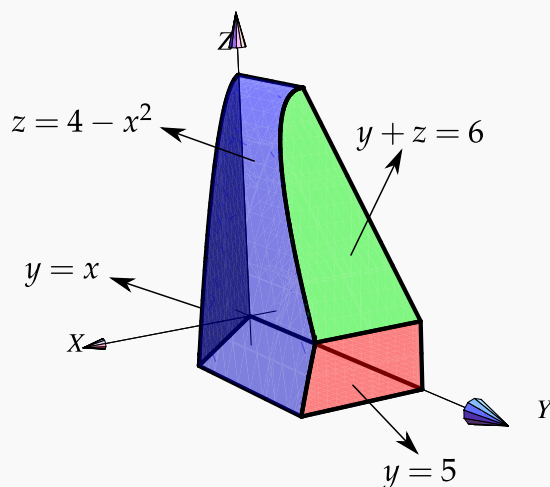
$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{x^2} \left[ \int_{1-x^2}^{2-2x^2} 1 \, dy \right] dz dx + \int_0^1 \int_{x^2}^{\frac{1}{2}(1+x^2)} \left[ \int_{1-x^2}^{2-2z} 1 \, dy \right] dz dx$$



### Ejemplo 5.22

Considere el sólido  $Q$  limitado por  $z = 4 - x^2$ ,  $y + z = 6$ ,  $y = x$ ,  $y = 5$ ,  $z = 0$  y  $x = 0$ , como se muestra en la figura. Usando integral triple, *plantear* las integrales necesarias para calcular el volumen de  $Q$  proyectando en cada uno de los planos  $XY$ ,  $YZ$  y  $XZ$

Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



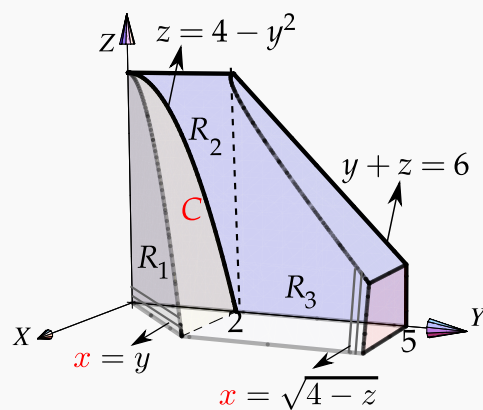
**Proyectando sobre el plano  $XY$ .** La región de integración es  $R_{xy} = R_1 + R_2 + R_3$ .

La curva  $C$  divide las regiones  $R_1$  y  $R_2$  y la recta  $x = \sqrt{3}$  divide la región  $R_1$  y la región  $R_3$ . La curva  $C$  es la proyección de la curva de intersección entre las superficies  $z + y = 6$  y  $z = 4 - x^2$ , es decir,  $C: y = 2 + x^2$ .



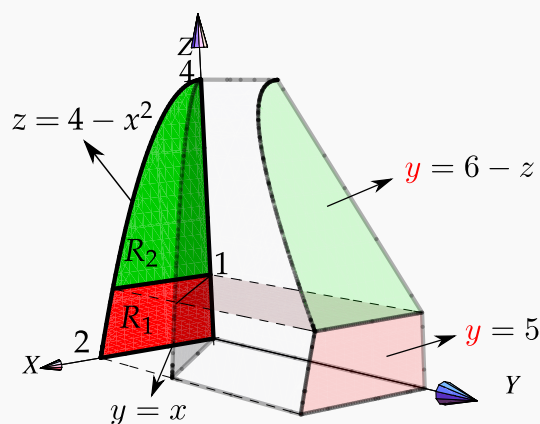
**Proyectando sobre el plano  $YZ$ .** La curva  $C$  es la proyección de la curva de intersección entre las superficies  $y = x$  y  $z = 4 - x^2$ , es decir,  $C: z = 4 - y^2$ .

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \left[ \int_0^y 1 dx \right] dz dy \\ &+ \int_0^2 \int_{4-y^2}^4 \left[ \int_0^{\sqrt{4-z}} 1 dx \right] dz dy \\ &+ \int_2^5 \int_0^{6-y} \left[ \int_0^{\sqrt{4-z}} 1 dx \right] dz dy \end{aligned}$$



**Proyectando sobre el plano  $XZ$ .**

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-z}} \left[ \int_x^5 1 dy \right] dx dz + \int_1^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \left[ \int_x^{6-z} 1 dy \right] dx dz \\ V_Q &= \frac{68}{3} - \frac{12\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

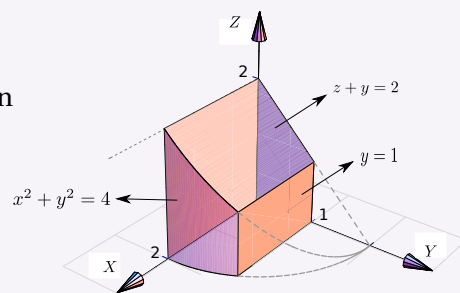


## 21

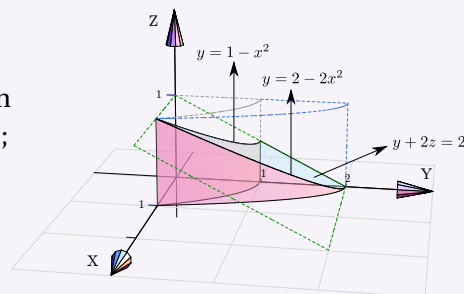
## Ejercicios

● Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)

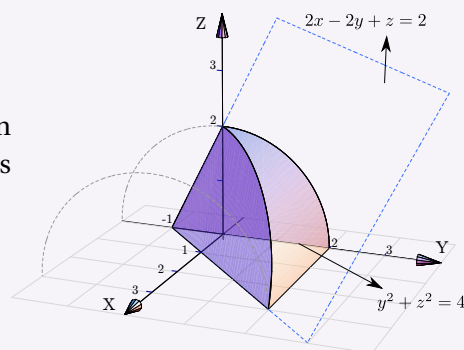
**5.21** Plantear la o las integrales *triples* necesarias para calcular el volumen del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $z + y = 2$ ;  $y = 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $z = 0$ , en el I octante



**5.22 Plantear** la o las integrales *triples* necesarias para calcular el volumen del sólido  $Q$  si este sólido está limitado por las superficies  $y = 2 - 2x^2$ ;  $y = 1 - x^2$ ;  $y + 2z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ ; en el I octante.



**5.23 Plantear** la o las integrales *triples* necesarias para calcular el volumen sólido  $Q$  si este sólido está limitado por la superficie  $y^2 + z^2 = 4$  y los planos  $2x - 2y + z = 2$ ;  $x = 0$  y  $z = 0$ .



## 5.7 Cambio de variables en integral triple.

La versión del teorema de cambio de variable para integrales triples es la siguiente,

### Teorema 5.4 (Cambio de variable).

Sea  $Q$  una región acotada en  $\mathbb{R}^3$  cuya frontera consiste de un número finito de superficies suaves. Supongamos que  $Q$  está contenido en un conjunto abierto  $U$  y sea  $L(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$  un cambio de variable de  $U$  en  $\mathbb{R}^3$  invertible en el interior de  $Q$  y con derivadas parciales continuas. Sea  $f$  una función

continua y acotada sobre  $L(Q)$  y sea  $J(u, v, w) = \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$  no nulo en el interior de  $Q$ , entonces

$$\iiint_Q f(L(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw = \iiint_{L(Q)} f(x, y, z) dx dy dz$$

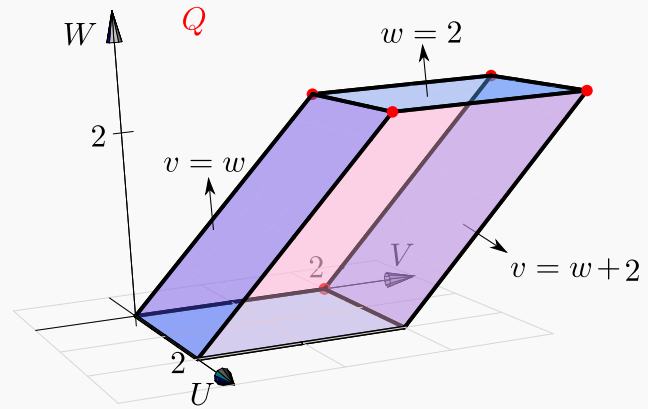
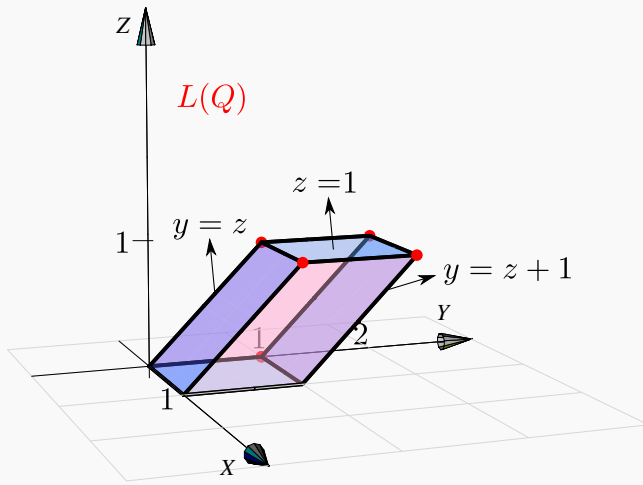


**Ejemplo 5.23 (Volumen de un Paralelepípedo).**

Consideremos un paralelepípedo  $Q$  generado por los vectores  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (0, 2, 2)$  y  $C = (0, 2, 0)$ . Como se sabe del álgebra lineal, el volumen de  $Q$  es  $V_Q = |\mathbf{Det}(A \ B \ C)| = 8$ . Si  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una transformación lineal, entonces el paralelepípedo generado por  $L(A), L(B)$  y  $L(C)$ , el cual denotamos con  $L(Q)$ , tiene volumen

$$V_{L(Q)} = |\mathbf{Det}(L)| V_Q = |\mathbf{Det}(L)| \cdot 8.$$

Verifiquemos en este caso el teorema de cambio de variable aplicando al sólido  $Q$  de la figura, la transformación lineal  $L(u, v, w) = (u/2, v/2, w/2)$ .



$$V_{L(Q)} = \int_0^1 \int_z^{z+1} \int_0^1 1 \cdot dx dy dz = 1 \quad \text{y} \quad V_Q = \int_0^2 \int_w^{w+2} \int_0^2 1 du dv dw = 8$$

Ahora, con una verificación, calculamos  $V_{L(Q)}$  aplicando un cambio de variable. Sea  $x = u/2$ ,  $y = v/2$ ,  $z = w/2$  sobre  $Q$ , obtenemos el nuevo sólido  $L(Q)$ . En este caso,

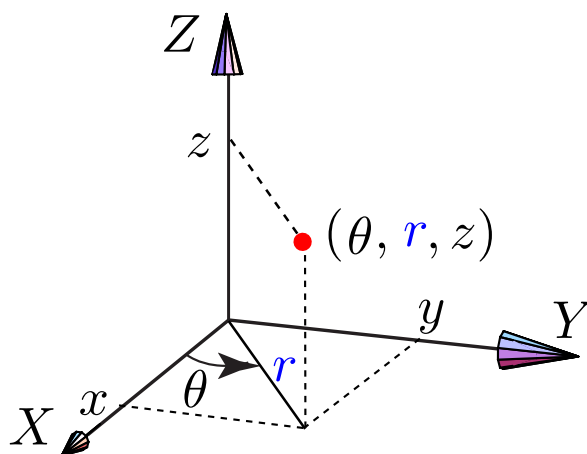
$$J(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8},$$

y entonces, por el teorema de cambio de variable,

$$\begin{aligned} V_{L(Q)} &= \iint_{R_{vw}} \left[ \int_0^2 1 \cdot |J(u, v, w)| dw \right] du dv \\ &= \int_0^2 \int_w^{w+2} \left[ \int_0^2 1 \cdot \left| \frac{1}{8} \right| dw \right] du dv = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1. \end{aligned}$$

## 5.8 Coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas cilíndricas se usan para describir regiones que son simétricas respecto a alguno de los ejes. La posición de un punto  $P(x, y, z)$  en el espacio está determinada por los números  $r, \theta, z$  donde  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares del punto  $(x, y)$ .



Si integramos proyectando sobre el plano  $XY$ , el cambio de variable es

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \\ z = z \end{cases} \quad \text{además} \quad |J(r, \theta, z)| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Como  $J(r, \theta, z) = r$  entonces el cambio de variable es invertible si  $r \neq 0$ . Entonces, si se cumplen las condiciones del teorema de cambio de variable,

**(Coordenadas Cilíndricas).**

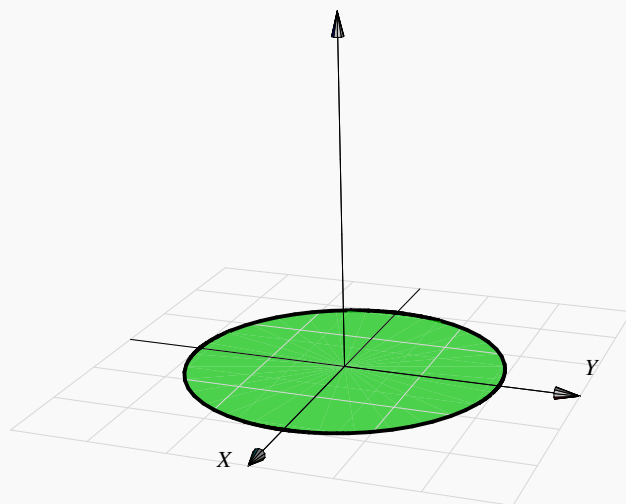
$$\iiint_{Q'} f(x, y, z) dV = \iiint_Q f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

**Ejemplo 5.24**

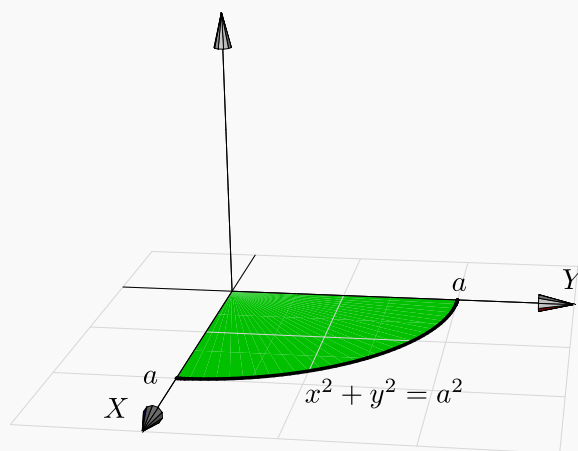
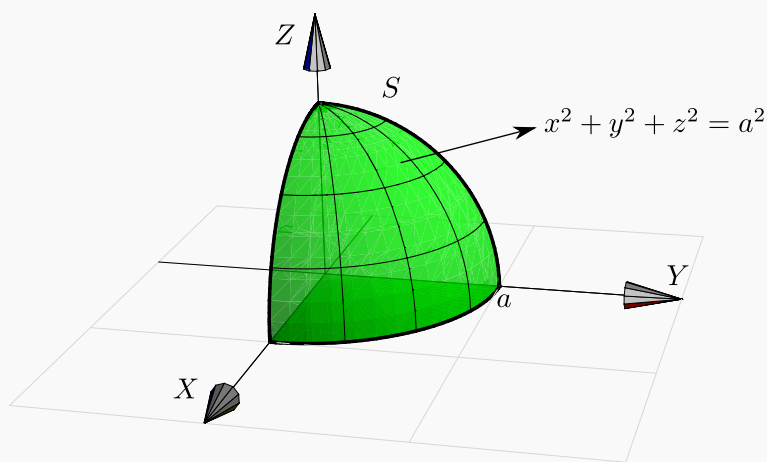
Verifique que el volumen de un cilindro recto  $Q$  de radio  $a$  y altura  $h$ , es  $V = \pi a^2 h$ .

**Solución:**  $Q$  es el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  limitado por  $z = 0$  y  $z = h$ . La proyección sobre el plano  $XY$  es el círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_Q dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \int_0^h r \, dz \right] dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^a rh \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} h \, d\theta = \frac{a^2}{2} h \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2 h
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.25**

Verifique que el volumen una esfera  $S$  de radio  $a$  tiene volumen  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ .



**Solución:** Podemos calcular el volumen de un octavo de esfera y multiplicar por 8 (ver figura). La esfera tiene ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Como la proyección es un círculo, usamos coordenadas cilíndricas:  $x = r \cos \theta$ ,

$y = r \operatorname{sen} \theta$  y  $z = z$ . La esfera está entre las superficies  $z = 0$  y  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$ .

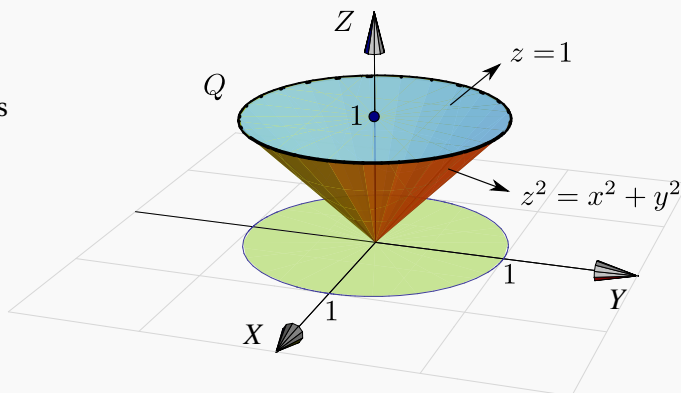
$$\begin{aligned} V &= 8 \cdot \iiint_Q dV = 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^a \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz \right] dr d\theta = 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta \\ &= 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \left. \frac{-\sqrt{(a^2 - r^2)^3}}{3} \right|_0^a d\theta = 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3} d\theta = \frac{8a^3}{3} \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} a^3 \pi \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.26

Considere el sólido  $Q$  limitado por las superficies  $z^2 = x^2 + y^2$  (cono), y el plano  $z = 1$ .

a.) Calcular  $\iiint_Q 2z dV$ .

b.) Calcular el volumen de  $Q$ .



### Solución:

a.) En coordenadas rectangulares tendríamos

$$\begin{aligned} \iiint_Q 2z dV &= \iint_R \left[ \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 2z dz \right] dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 2z dz dy dx \end{aligned}$$

La región de integración se describe fácil si usamos coordenadas cilíndricas. La proyección  $R$  sobre el plano  $XY$  es un círculo de radio 1. En coordenadas polares esta región se describe como  $R: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$ . Usando el cambio de variable  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \operatorname{sen} \theta$ , entonces el sólido está entre las superficies  $z = r$  y  $z = 1$ .

$$\begin{aligned}
 \iiint_Q 2z \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ \int_r^1 2z \, dz \right] r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^2 \Big|_r^1 r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_0^1 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

b.) Volumen de  $Q$ .

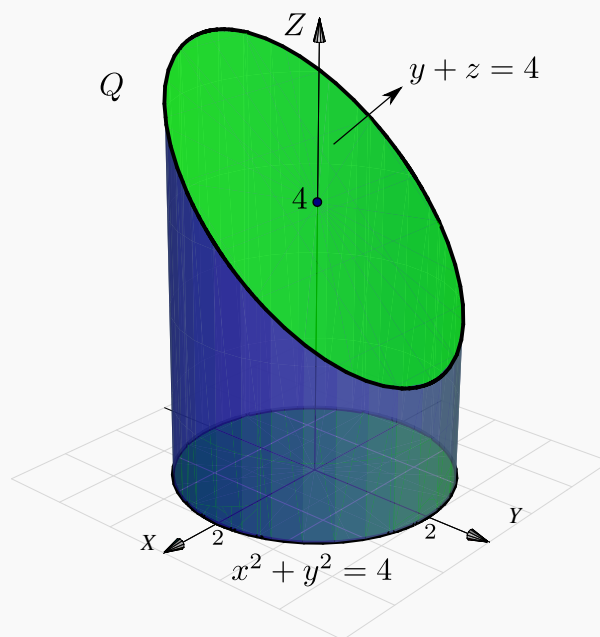
$$\begin{aligned}
 \iiint_Q dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ \int_r^1 dz \right] r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \Big|_r^1 r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^2) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right|_0^1 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} d\theta = \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.27

El sólido  $Q$  de la figura está limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y el plano  $y + z = 4$ . Calcular el volumen de  $Q$ .

**Solución:** Usamos coordenadas cilíndricas:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  y  $z = z$ . Observemos que  $Q$  está entre las superficies  $z = 0$  y  $z = 4 - y = 4 - r \sin \theta$ . La región de integración en el plano  $XY$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 4$ , es decir el círculo  $r = 2$  con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

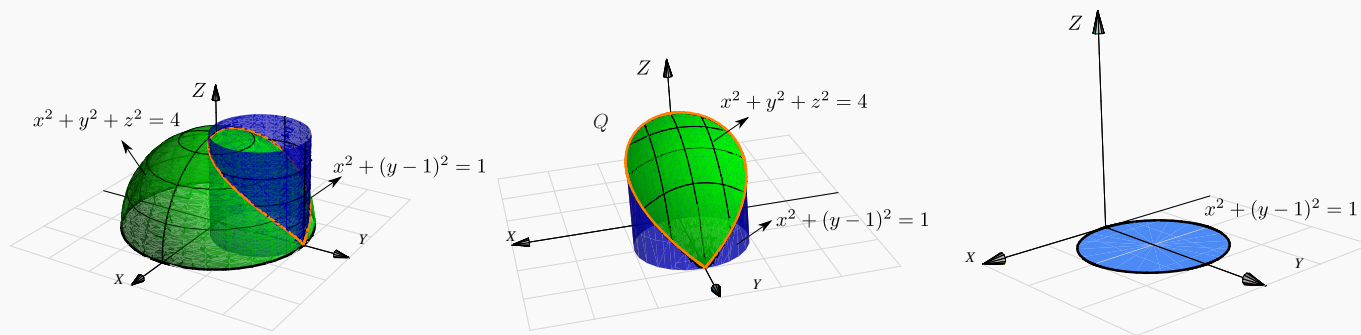
$$\begin{aligned} V_Q &= \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[ \int_0^{4-r \sin \theta} r \, dz \right] dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r (4 - r \sin \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 8 - \frac{8 \sin \theta}{3} \, d\theta = 16\pi. \end{aligned}$$



### Ejemplo 5.28

Calcule el volumen del sólido de la figura. Este sólido  $Q$  está limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y el cilindro  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ .

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Solución:** El Sólido  $Q$  está entre las superficies  $z = 0$  y  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4 - r^2}$ . La proyección del sólido es el círculo  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ . Este círculo se describe en coordenadas polares como

$$0 \leq r \leq 2 \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{o también,} \quad 0 \leq r \leq 2 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

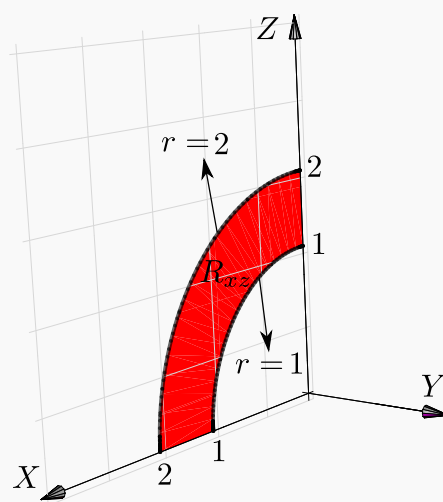
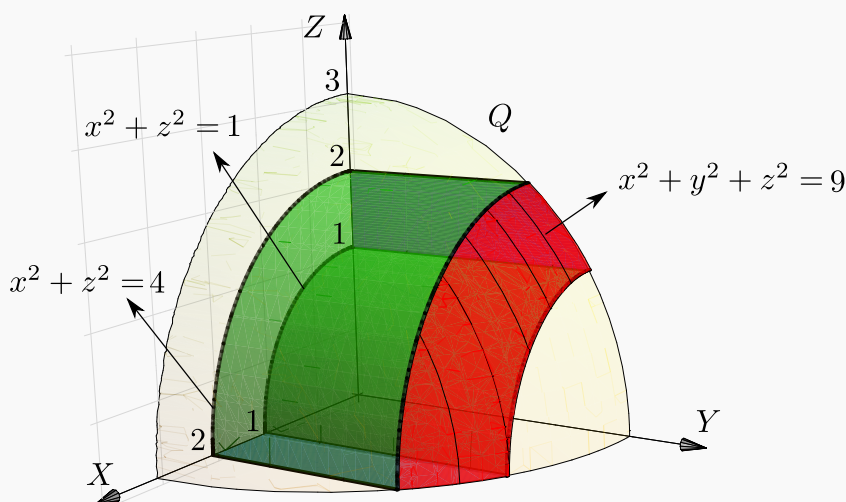
El volumen de  $Q$  es,

$$\begin{aligned}
 \iiint_Q dV &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} \left[ \int_0^{\sqrt{4-r^2}} dz \right] r dr d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} zr \Big|_0^{\sqrt{4-r^2}} dr d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} r\sqrt{4-r^2} dr d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\frac{1}{3} (4-r^2)^{3/2} \Big|_0^{2\sin\theta} d\theta \\
 &= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4-4\sin^2\theta)^{3/2} - 8 d\theta \\
 &= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8 \cos^3\theta - 8 d\theta = -\frac{8}{3} (4/3 - \pi).
 \end{aligned}$$

Aquí se usó la integral  $\int \cos^3 t dt = \frac{3 \sin(t)}{4} + \frac{\sin(3t)}{12}$ .

### Ejemplo 5.29

Calcule el volumen de sólido  $Q$ , mostrado en la figura, el cual está limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$  y los cilindros  $x^2 + z^2 = 2^2$ ,  $x^2 + z^2 = 1^2$ .



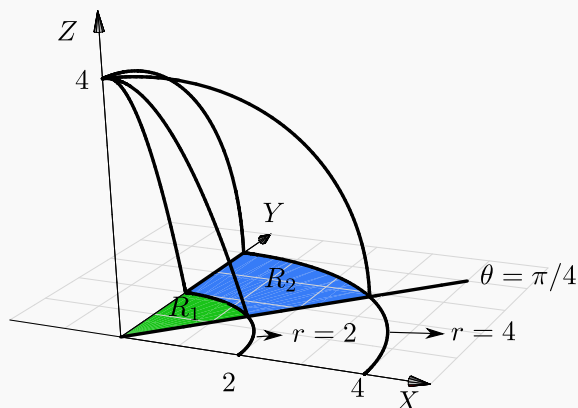
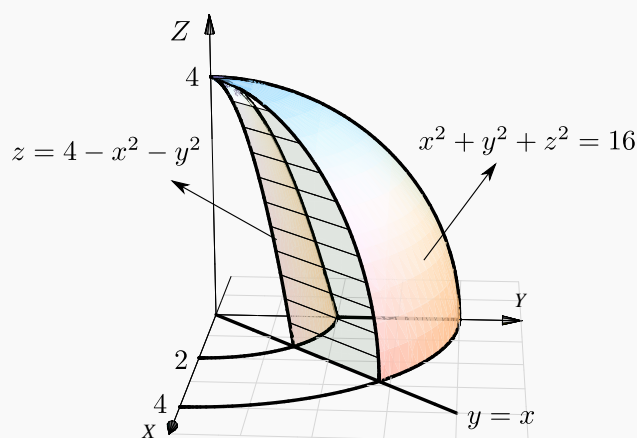
**Solución:** La proyección sobre  $XZ$  es una región entre un par de segmentos de círculo. Usamos coordenadas cilíndricas, el cambio de variable sería  $\mathbf{r} : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ y = y \end{cases}$  y como antes,  $J(r, \theta, y) = r$ .

La proyección  $R_{xz}$  está entre las circunferencias  $r = 1$  y  $r = 2$  y el ángulo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . El sólido  $Q$  está entre  $y = 0$  y  $y = \sqrt{3^2 - x^2 - z^2} = \sqrt{3^2 - r^2}$ .

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \left[ \int_0^{\sqrt{9-r^2}} 1 \cdot dy \right] r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \left[ y \Big|_0^{\sqrt{9-r^2}} \right] r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r \sqrt{9-r^2} \, dr \, d\theta, \quad \text{hacemos } u = 9-r^2, \, du = -2r \, dr, \\ &= \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{3} (9-r^2)^{3/2} \Big|_{9-1^2}^{9-2^2} d\theta = \frac{\pi}{6} (16\sqrt{2} - 5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.30

Calcule, usando coordenadas cilíndricas, el volumen del sólido  $Q$ , limitado por la porción de paraboloide  $z = 4 - x^2 - y^2$ , la porción de esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  y el plano  $x = y$ ; en el primer octante (figura).



**Solución:** La región e integración, proyectando sobre  $XY$ , es  $R = R_1 \cup R_2$ .

- $R_1 : 0 \leq r \leq 2, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2,$
- $R_2 : 2 \leq r \leq 4, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2.$



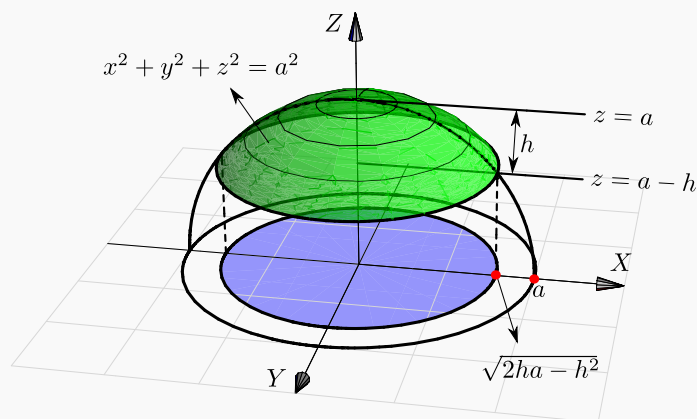
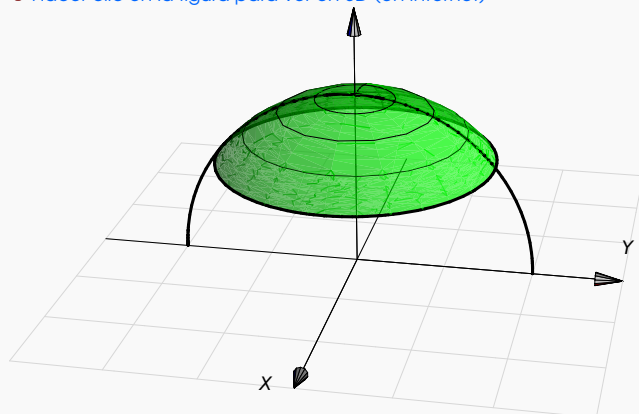
- En la región  $R_1$ , el sólido está entre la porción de esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  y la porción de paraboloide  $z = 4 - x^2 - y^2$ .
- En la región  $R_2$ , el sólido está entre la porción de esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  y el plano  $z = 0$ .

$$\begin{aligned}
 V_Q &= \iiint_Q dV = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 \left[ \int_{4-r^2}^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz \right] r \, dr \, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_2^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 r \sqrt{16-r^2} - r(4-r^2) \, dr \, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_2^4 r \sqrt{16-r^2} \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left. -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} - 2r^2 + \frac{r^4}{4} \right|_0^2 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left. -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} \right|_2^4 d\theta \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left. -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} - 2r^2 + \frac{r^4}{4} \right|_0^2 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left. -\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} \right|_2^4 d\theta \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{52}{3} - 8\sqrt{3} \, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\sqrt{3} \, d\theta = \left( \frac{13}{3} - 2\sqrt{3} \right) \pi + 2\pi\sqrt{3} = \frac{13\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.31

El sólido  $Q$  de la figura es un casquete, de altura  $h$ , de una esfera de radio  $a$ .

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



Vamos a usar coordenadas cilíndricas. Para calcular su volumen proyectamos sobre el plano  $XY$ . La proyección del casquete es un círculo de radio  $\sqrt{2ha - h^2}$ . Este radio se obtiene calculando la intersección de la curva  $z^2 + y^2 = a^2$  y la recta  $z = a - h$ .

El sólido  $Q$  está limitado arriba por la superficie  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$  y por abajo por la superficie  $z = a - h$ . Entonces

$$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2ha-h^2}} \int_{r(a-h)}^{\sqrt{a^2-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

Como (usando “sustitución”)  $\int r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - r^2)^3}$  salvo constantes, se sigue que

$$\begin{aligned} V_Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2ha-h^2}} r \sqrt{a^2 - r^2} - r(a-h) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - r^2)^3} - \frac{r^2(a-h)}{2} \right]_0^{\sqrt{2ha-h^2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3} (a-r)^3 - \frac{(2ha-h^2)(a-h)}{2} + \frac{1}{3} a^3 \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} h^2 (3a-h) \end{aligned}$$

## 22

## Ejercicios

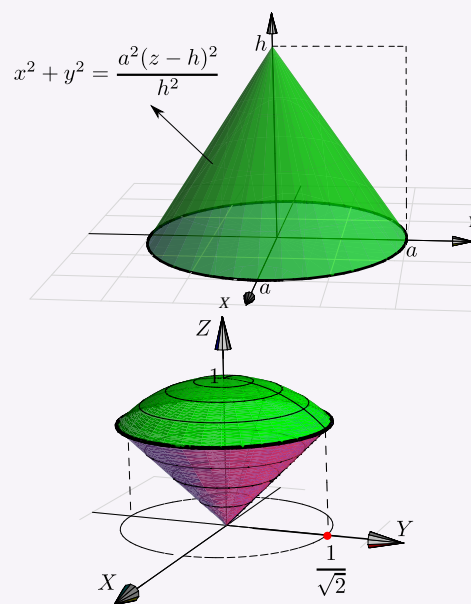
**5.24** Verifique, que el volumen del cono de base circular de radio  $a$  y altura  $h$  es  $V_C = \frac{\pi a^2 h}{3}$ .

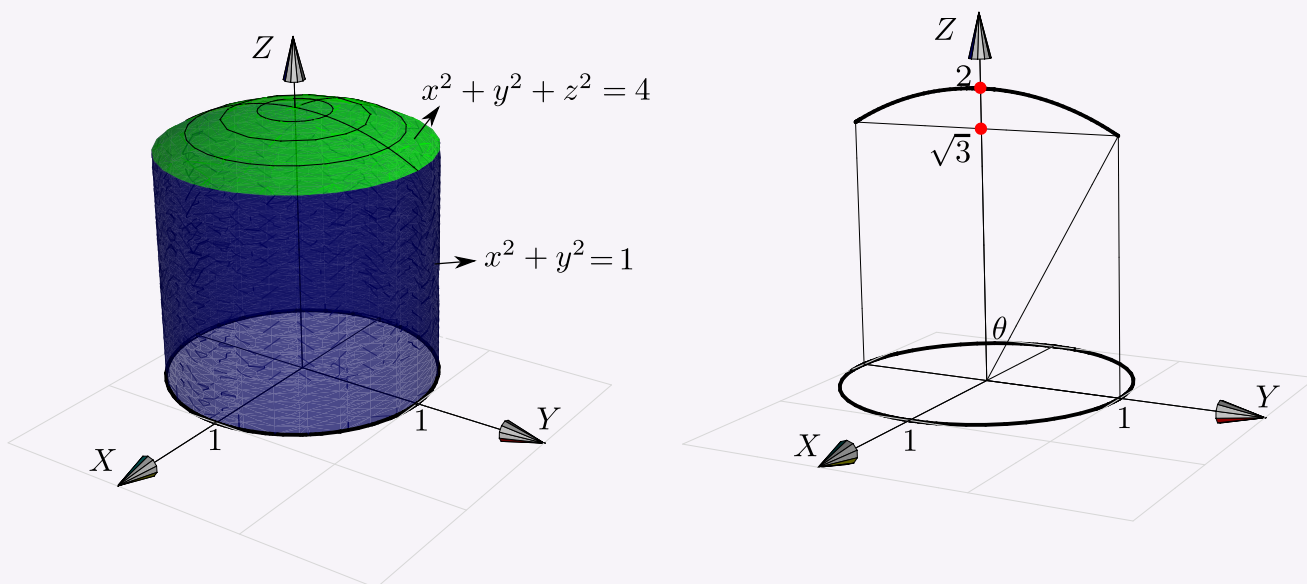
**Ayuda:** El cono se puede modelar con la ecuación  $x^2 + y^2 = \frac{a^2(z-h)^2}{h^2}$ , tal y como se muestra en la figura.

El cono está entre  $z=0$  y  $z=h - \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$  pues  $z \leq h$ .

**5.25** Calcule el volumen del sólido  $Q$  limitado por el cono  $z^2 = x^2 + y^2$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**5.26** Calcule, usando coordenadas esféricas, el volumen del sólido  $Q$  limitado por un casquete de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , como se muestra en la figura.



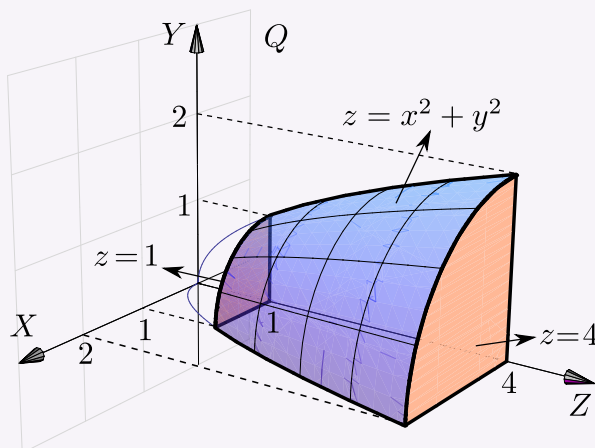


**5.27** Sea  $I = \iiint_Q \sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$

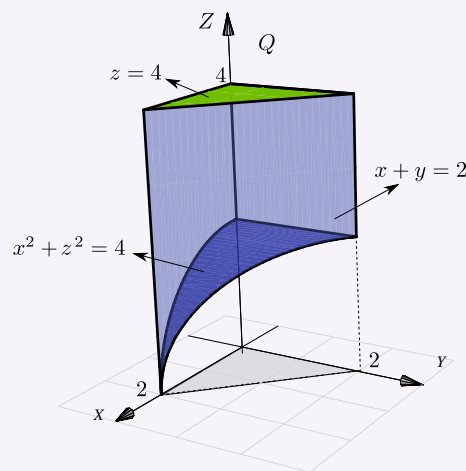
a.) Dibuje el sólido  $Q$ . Observe que el sólido está entre las superficies  $z^2 + x^2 + y^2 = 16$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \in [0, 2]$ .

b.) Calcule  $I$  usando coordenadas cilíndricas.

**5.28** Sea  $Q$  el sólido limitado por  $y = 1$ ,  $y = x^2 + z^2$  y  $y = 4$ ; como se muestra en la figura. Calcule  $\iiint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} dV$ .

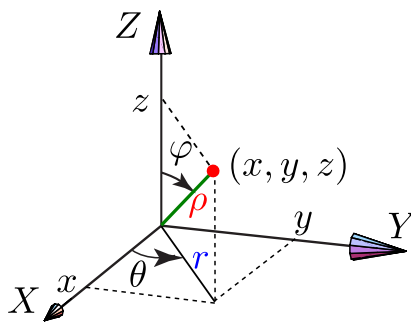


**5.29** Calcule el volumen del sólido  $Q$  limitado por  
 $S_1: x^2 + z^2 = 4$ ,  $S_2: y + x = 2$ ,  $S_3: z = 4$ ,  $S_5: y = 0$ ,  
 $S_6: x = 0$ .



## 5.9 (\*)Coordenadas esféricas.

En el caso de coordenadas esféricas, la posición de un punto  $P = (x, y, z)$  en el espacio está determinada por los números  $\rho, \theta, \varphi$  donde  $\rho$  es la distancia del punto al origen,  $\theta$  es la medida del ángulo de la proyección del punto en el plano  $XY$  con el eje  $X$  (llamado “longitud”) y  $\varphi$  es la medida del ángulo entre el vector  $\vec{P}$  y el eje  $Z$  (llamado “latitud”). Est último ángulo se mide desde el eje  $Z$ . Los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  se pueden tomar respecto a los otros ejes.



### 5.9.1 Describiendo Superficies en Coordenadas Esféricas.

En lo que sigue,  $\varphi$  lo tomaremos como aparece en la figura anterior. El cambio de variable de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas es

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{con } \rho > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Observe que hay una relación entre coordenadas polares y esféricas: 
$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta = r \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta = r \sin \theta \end{cases}$$

A las coordenadas esféricas a veces se les llama “coordenadas polares esféricas”.

**Ejemplo 5.32** (Semi-cono  $z^2 = x^2 + y^2$  con  $z \geq 0$ )

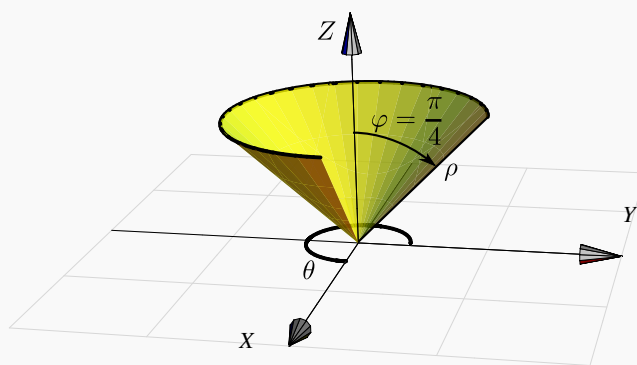
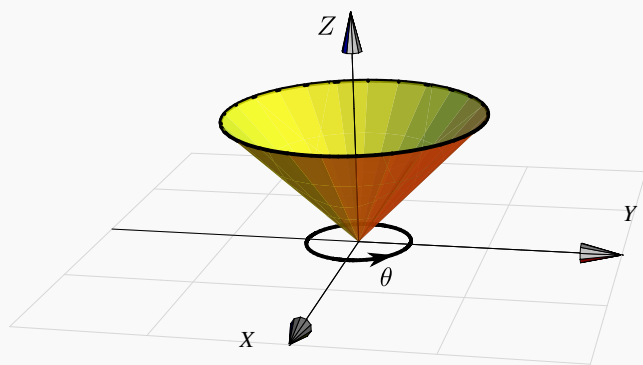
En la ecuación del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  hacemos la sustitución  $x = \rho \sen \varphi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sen \varphi \sen \theta$ ,  $z = \rho \cos \varphi$  y obtenemos

$$\rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \sen^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sen^2 \varphi \sen^2 \theta \implies \cos^2(\varphi) = \sen^2(\varphi)$$

Podemos tomar la solución  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Así, esta rama del cono se describe (en coordenadas esféricas) como

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \rho > 0.$$

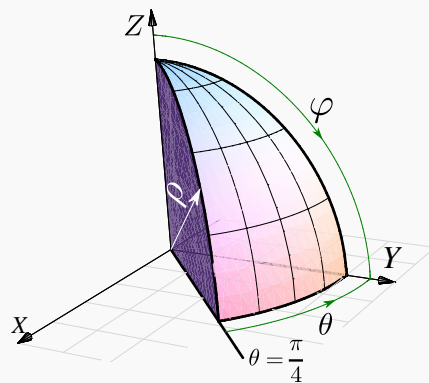
Una parametrización de esta superficie es  $\mathbf{r}(\rho, \theta) = \left( \rho \sen \frac{\pi}{4} \cos \theta, \rho \sen \frac{\pi}{4} \sen \theta, \rho \cos \frac{\pi}{4} \right)$ , con  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $\rho > 0$ .

**Ejemplo 5.33**

Consideremos el sólido limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el plano  $y = x$ , en el primer octante.

La esfera de radio 1 se describe en coordenadas esféricas por  $\rho = 1$  pues, haciendo la sustitución  $x = \rho \sen \varphi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sen \varphi \sen \theta$ ,  $z = \rho \cos \varphi$  en  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  obtenemos  $\rho = 1$ .

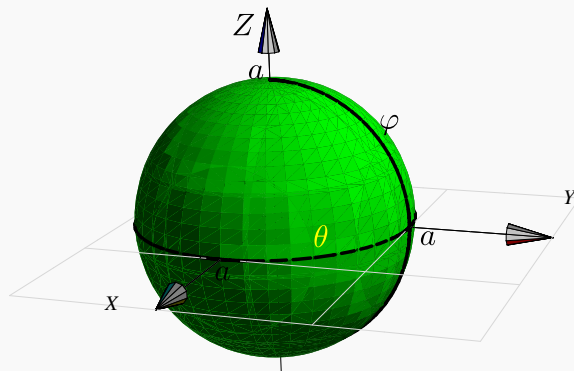
Este sólido se puede describir en coordenadas esféricas con  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$  y  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .



**Ejemplo 5.34** (Superficie de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ).

Haciendo el cambio de variable y simplificando queda  $\rho = a$ . Luego, la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  se describe (en coordenadas esféricas) como

$$\rho = a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$



Una parametrización de esta superficie es  $\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi)$ , con  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

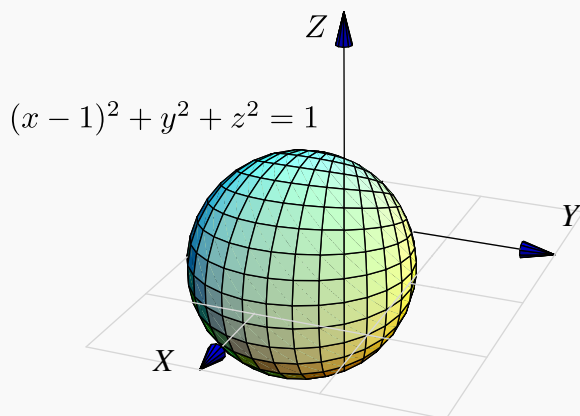
**Ejemplo 5.35** (Superficie de la esfera  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ ).

Para hacer la descripción de la esfera  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$  en coordenadas polares, hacemos el cambio de variable y, simplificando, queda  $\rho = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$ . Luego, la esfera se describe (en coordenadas esféricas) como

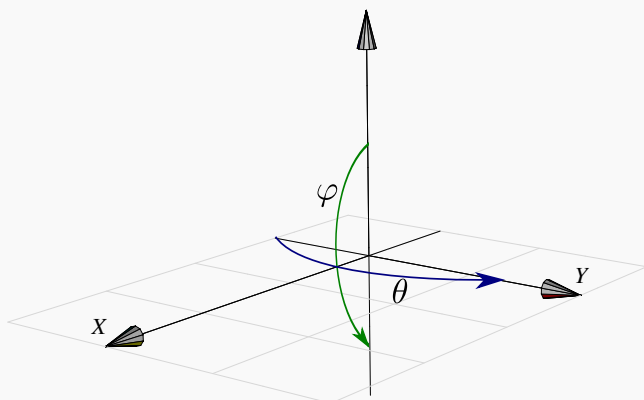
$$\rho = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Una parametrización de esta esfera es

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, \theta) = (2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \cdot \cos \varphi) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$



[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

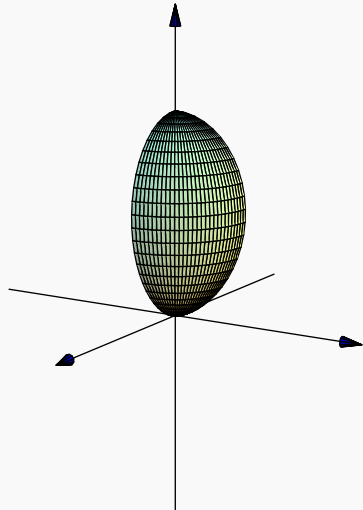


**Ejemplo 5.36** (Superficie  $S$ :  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^4$ ).

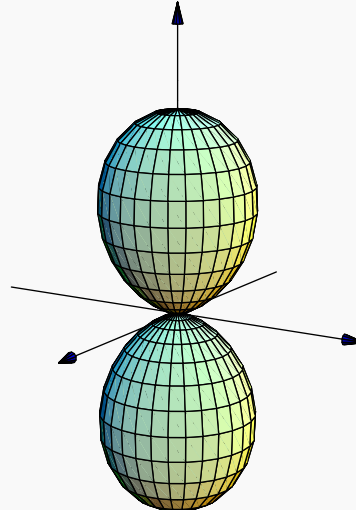
Para hacer la descripción de la superficie  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^4$  en coordenadas polares, hacemos el cambio de variable y simplificando queda  $\rho = \cos^2 \varphi$ . Luego, la superficie se describe (en coordenadas esféricas) como  $\rho = \cos^2 \varphi$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

$$\rho = \cos^2 \varphi, 0 \leq \theta < \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$



$$\rho = \cos^2 \varphi, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

**5.9.2 Cambio de variable con coordenadas esféricas.**

En coordenadas esféricas ponemos  $u = r$ ,  $v = \theta$  y  $w = \varphi$ . Como dijimos antes, vamos a tomar el cambio de variable,

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{en este caso} \quad |J(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin \varphi.$$

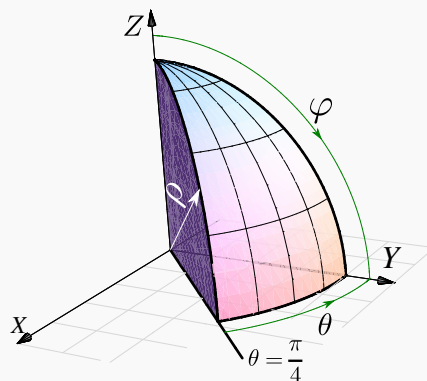
con  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . El interior de la región de integración requiere  $\rho > 0$  y  $\varphi \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , para que el jacobiano no se anule. Si se cumplen las condiciones del teorema de cambio de variable, entonces

**(Coordenadas Esféricas).**

$$\iiint_{Q'} f(x, y, z) dV = \iiint_Q f(\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi) \rho^2 |\sin \varphi| d\rho d\theta d\varphi$$

**Ejemplo 5.37**

Calcule, usando coordenadas esféricas, la integral  $\iiint_Q z dV$  si  $Q$  es el sólido limitado por las superficies  $y = x$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ; en el primer octante.



**Solución:** Haciendo el cambio de variable,  $\rho = 1$ ,  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$  y  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Luego,

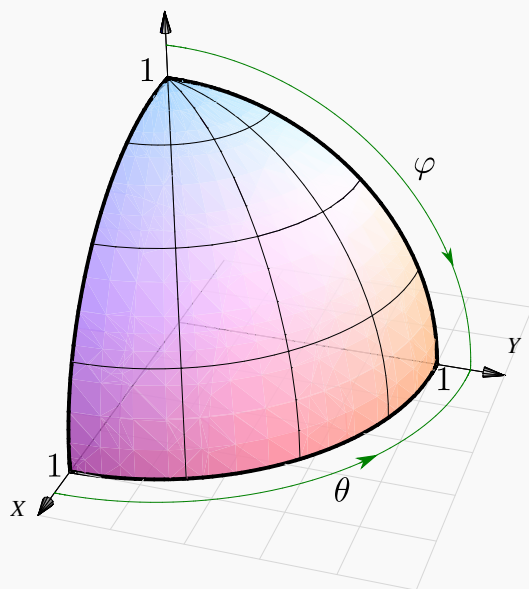
$$\begin{aligned} \iiint_Q z dV &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho \cos(\varphi) \cdot \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left. \frac{\rho^4}{4} \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \right|_0^1 d\varphi d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left. \frac{1}{4} \frac{\sin^2(\varphi)}{2} \right|_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{8} d\theta = \frac{\pi}{32}. \end{aligned}$$



**Ejemplo 5.38**

Calcular, usando coordenadas esféricas, el volumen de la esfera  $Q: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución:** Vamos a calcular el volumen de un octavo de esfera. Aplicando el cambio de variable,  $\rho = 1$ ,  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$  y  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Notemos que  $|\sin \varphi| = \sin \varphi$  en  $[0, \pi/2]$ .



$$\begin{aligned}
 V_Q &= 8 \cdot \iiint_Q dV \\
 &= 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 |\sin \varphi| d\rho d\theta d\varphi \\
 &= 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left. \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right|_0^1 d\theta d\varphi \\
 &= 8 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \varphi}{3} d\theta d\varphi = 8 \cdot \left( -\frac{\pi \cos \varphi}{6} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.39**

Calcular  $\iiint_Q x^2 + y^2 dx dy dz$  donde  $Q$  es la esfera  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución:** Como ya vimos, esta esfera se puede describir, en coordenadas esféricas, como

$$\rho = 2 \sin \varphi \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Notemos además que  $|\sin \varphi| = \sin \varphi$  en  $[0, \pi]$ . Luego

$$\begin{aligned}
\iiint_Q (x^2 + y^2) dV &= \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sin\varphi \cos\theta} (\rho^2 \sin^2 \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{32}{5} \cos^5 \theta \sin^8 \varphi d\theta d\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{32}{5} \cos^5 \theta d\theta \cdot \int_0^\pi \sin^8 \varphi d\varphi = \frac{512}{75} \cdot \frac{35\pi}{128} = \frac{28\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Aquí usamos las integrales

- $\int \cos^5 \theta d\theta = \frac{5 \sin(\theta)}{8} + \frac{5 \sin(3\theta)}{48} + \frac{\sin(5\theta)}{80}$
- $\int \sin^8 \varphi d\varphi = \frac{840\varphi - 672 \sin(2\varphi) + 168 \sin(4\varphi) - 32 \sin(6\varphi) + 3 \sin(8\varphi)}{3072}.$

### Ejemplo 5.40

Calcular el volumen del sólido  $Q$  de ecuación  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^4$  (ver figura).

**Solución:**  $Q$  se puede describir, en coordenadas esféricas, como

$$r = \cos^2 \varphi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Notemos además que  $|\sin \varphi| = \sin \varphi$  en  $[0, \pi]$ . Luego,

$$\begin{aligned}
\iiint_Q dx dy dz &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\cos^2 \varphi} r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)^6 \sin(\varphi)}{3} d\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi \frac{2\pi \cos(\varphi)^6 \sin(\varphi)}{3} d\varphi = -\frac{2\pi}{3} \frac{\cos(\varphi)^7}{7} \Big|_0^\pi = \frac{4\pi}{21}
\end{aligned}$$

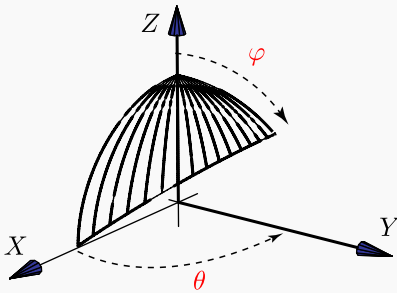
**Ejemplo 5.41** (Intercambio de ejes).

El sólido  $Q$  está limitado por las superficies  $y = z$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ; en el primer octante.

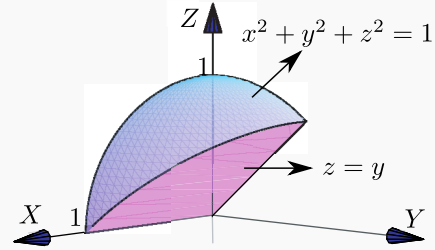
Vamos a calcular  $\iiint_Q z dV$ , usando coordenadas esféricas de tres maneras distintas (variando el orden de integración  $dx dy dz$ ).

● La manera “complicada”.

$$0 \leq \varphi \leq \arctan(\csc(\theta))$$



● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



En este caso  $\varphi$  varía entre 0 y el plano  $y = z$ . Entonces,

$$\rho \sin \varphi \sin \theta = \rho \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arctan(\csc(\theta)).$$

Luego,  $\varphi = \pi/2$  si  $\theta = 0$  y  $0 < \varphi \leq \arctan(\csc(\theta))$  si  $0 < \theta \leq \pi/2$ .

El cambio de variable sería

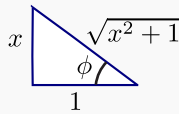
$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad |J| = \rho^2 \sin(\varphi). \\ z &= \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Como tenemos  $\varphi = \varphi(\theta)$ , integramos en el orden  $d\varphi d\theta$ . Debemos calcular (la integral impropia)

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\arctan(\csc(\theta))} \int_0^1 \rho \cos(\varphi) \cdot \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta$$

Aunque parece una integral complicada, en realidad no lo es. Solo debemos usar algunas identidades.

$$\begin{aligned} \tan \phi &= x \\ \phi &= \arctan(x) \end{aligned}$$



●  $\phi = \arctan(x)$

●  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

●  $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

●  $\cos^2(\arctan(\csc \theta)) = \frac{1}{\csc^2 \theta + 1}, \quad \theta \in D = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Esta última identidad se obtiene poniendo  $x = \csc \theta$  si  $\csc \theta > 0$  (no debemos usar  $\phi$ !). Si  $\csc \theta < 0 \Rightarrow -\csc \theta > 0$  y la identidad se obtiene usando las identidades  $\arctan(-t) = -\arctan(t)$  (pues  $\tan(-t) = -\tan t$ ) y  $\cos(-t) = \cos(t)$ .

El cálculo de la integral es como sigue,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\arctan(\csc(\theta))} \int_0^1 r \cos(\varphi) \cdot \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4} \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \Big|_0^1 d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{8} \cos^2(\varphi) \Big|_0^{\arctan(\csc(\theta))} d\varphi d\theta \\
 &= -\frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\csc^2 \theta + 1} - 1 d\theta \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \theta + 1} d\theta
 \end{aligned}$$

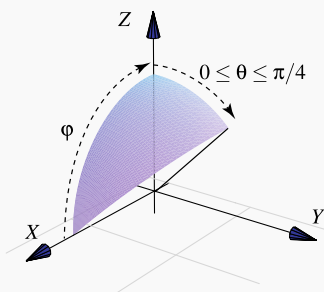
Hacemos el cambio  $\theta = \arctan(t)$ ,  $d\theta = \frac{1}{1+t^2} dt$ .

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt &= \int \frac{1}{1+2t^2} dt \\
 &= \frac{\arctan(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} + C = \frac{\arctan(\sqrt{2}\tan\theta)}{\sqrt{2}} + C
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\arctan(\csc(\theta))} \int_0^1 r \cos(\varphi) \cdot r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{8} \left( \frac{\arctan(\sqrt{2}\tan\theta)}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^\theta \\
 &= \frac{1}{8} \frac{\pi/2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

● **La manera fácil: Simplificación con un intercambio de ejes.** El cambio de variable sería



$$\begin{aligned}
 z &= \rho \sin \varphi \cos \theta, \\
 y &= \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad |J| = \rho^2 \sin(\varphi). \\
 x &= \rho \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_Q z \, dV &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \overbrace{[\rho \sin(\varphi) \cos(\theta)]}^z \cdot \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4} \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \Big|_0^1 \, d\varphi \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right) \frac{\cos \theta}{4} \Big|_0^{\pi/2} \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{\pi}{4} \frac{\cos \theta}{4} \, d\theta = \frac{\pi \sin \theta}{16} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}, \text{ pues } \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

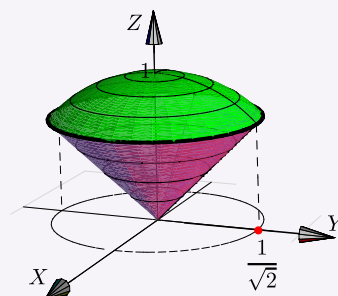
## Ejercicios

### 23

**5.30** Sea  $S$  la esfera de radio 1 centrada en el origen. Verifique que

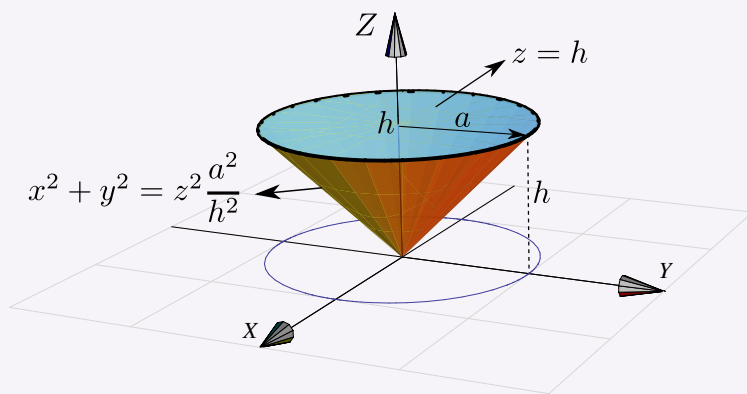
$$\iiint_S e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \, dV = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

**5.31** Calcule, usando coordenadas esféricas, el volumen del sólido  $Q$  limitado por el cono  $z^2 = x^2 + y^2$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .



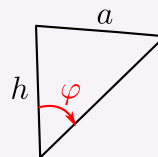
**5.32** Verifique, usando coordenadas esféricas, que el volumen del cono de base circular de radio  $a$  y altura  $h$  es  $V_C = \frac{\pi a^2 h}{3}$ .

**Ayuda:** El cono se puede modelar con la ecuación  $x^2 + y^2 = \frac{z^2 a^2}{h^2}$ , tal y como se muestra en la figura.



$$\cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$\varphi = \arctan(a/h)$$



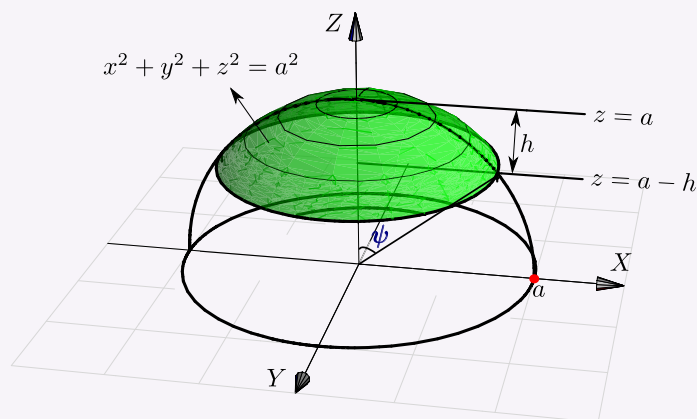
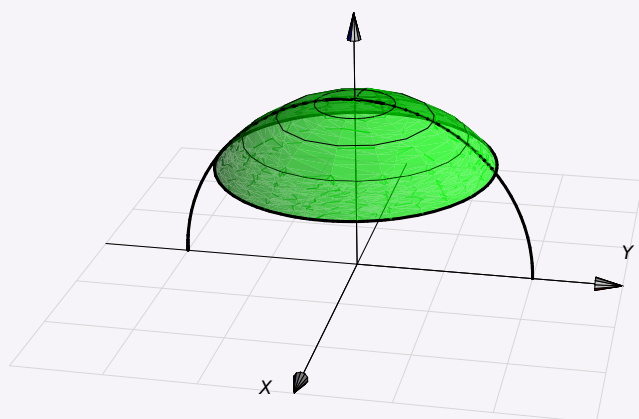
**5.33** Use coordenadas esféricas para evaluar la integral

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

**5.34 (Volumen de un casquete de esfera).** El sólido  $Q$  está limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el plano  $z = h$  con  $0 < h < a$  (el caso  $h = a$  corresponde a media esfera). Usando coordenadas esféricas, verifique que el volumen de  $Q$  es  $V_Q = \frac{h^2\pi}{3}(3a - h)$ .

**Ayuda:** Esta es una integral sencilla (aunque asusta). Como  $\sin(\psi) = \frac{a-h}{a}$  (ver figura), entonces  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{a-h}{a}\right)$ . La integral simplifica totalmente, pues el recorrido de  $\varphi$  sería evaluado con  $\cos \varphi$  y

$$\cos\left(\pi/2 - \arcsen\left(\frac{a-h}{a}\right)\right) = \sin\left(\arcsen\left(\frac{a-h}{a}\right)\right) = \frac{a-h}{a}.$$



## 5.10 (\*)Singularidades.

El método preferido para analizar el comportamiento de las funciones en sus singularidades es el paso al límite. Si  $f(x, y)$  es continua en una región  $R$  excepto en un punto  $(a, b)$  entonces definimos  $R_\epsilon = R - B_\epsilon$  donde  $B_\epsilon$  es un círculo de radio  $\epsilon > 0$  alrededor de  $(a, b)$ . Si  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{R_\epsilon} f(x, y) dx dy$  existe, entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{R_\epsilon} f(x, y) dx dy$$

**Ejemplo 5.42**

Calcular  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy dx$ .

**Solución:** Tenemos una singularidad en  $y = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int_0^{1-\epsilon} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} dy dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 x \arcsen y \Big|_0^{1-\epsilon} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 x \arcsen(1-\epsilon) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \arcsen(1-\epsilon) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \arcsen(1-\epsilon) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.43**

Sea  $R$  el rectángulo  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Calcular  $\iint_R \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy$ .

**Solución:** Hay un problema en  $x = 0, y = 0$ .

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dy dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4(1 - \sqrt{\epsilon})^2 = 4. \end{aligned}$$

**Integrales impropias y primitivas.** El Teorema de Darboux dice que si una función  $P$  es primitiva de otra función, entonces  $P$  debe cumplir el Teorema del Valor Intermedio: La imagen de un intervalo es también un intervalo. En particular, las funciones que tienen una discontinuidad de salto en un intervalo, no pueden tener primitiva en este intervalo. Por ejemplo,

$$1. \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + K \text{ pero } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \neq 0, \text{ en realidad } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \text{ es divergente}$$

2. Variaciones de este ejemplo son

$$\int_2^5 \frac{1}{(x-4)^2} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

3. En varias variables, si calculamos *sin tener en cuenta las singularidades* podemos obtener cosas como

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = -\pi \text{ mientras que } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \pi$$

## 24

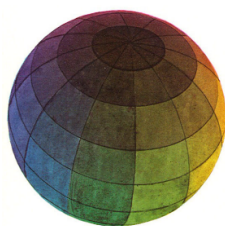
### Ejercicios

**5.35** Verifique que  $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx dy = \frac{8}{3}$  donde  $R$  es el rectángulo  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**5.36** Verifique que  $\iint_R \ln x dx dy = 2 - e$  donde  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq e^y, 0 \leq y \leq 1\}$ .

**5.37** Sea  $a > 0$ . Calcular  $\iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a - x^2 - y^2}} dA$  si  $D$  es el disco  $x^2 + y^2 \leq a$ .





Versión actualizada de este libro:  
<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/>



Superficies parametrizadas.  
Superficies regulares.  
Área de una superficie.  
Integral sobre una superficie.  
Integral de flujo.  
Superficies orientables.  
Teorema de la Divergencia.

## 6 — Integral de superficie.

### 6.1 Superficies parametrizadas.

Una parametrización de una superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  es una función inyectiva  $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  con  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  y  $z(u, v)$  funciones continuas sobre  $D$ , cuya imagen es  $S$ , es decir,  $\mathbf{r}(D) = S$ . La superficie  $S = \mathbf{r}(D)$  se puede describir como

$$S: \mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \hat{\mathbf{i}} + y(u, v) \hat{\mathbf{j}} + z(u, v) \hat{\mathbf{k}}, \quad (u, v) \in D.$$

**Caso**  $S: z = f(x, y)$

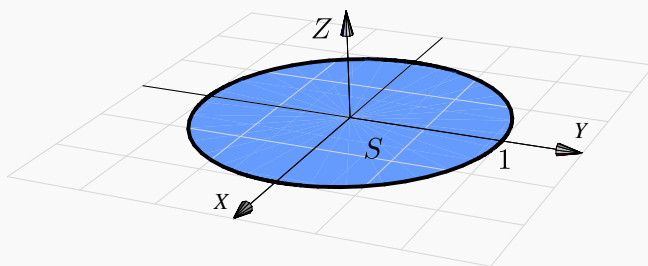
Una superficie  $S: z = f(x, y)$  en un dominio  $D$ , se puede parametrizar como

$$\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + f(x, y) \hat{\mathbf{k}}, \quad (x, y) \in D.$$

Observe que  $D$  es la proyección de la superficie en el plano  $XY$ .

#### Ejemplo 6.1

Considere la superficie  $S: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ . Claramente  $S$  es el círculo de radio 1 en el plano  $XY$ , centrado en el origen.



Para describir a  $S$  podemos escribir  $S: z = 0$  en el dominio  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Pero más conveniente es parametrizar  $S$  como

$$\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + 0 \cdot \hat{\mathbf{k}}, \quad (x, y) \in D.$$

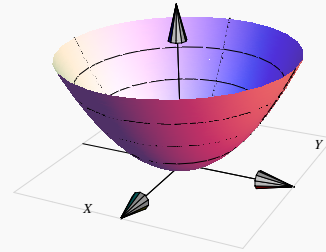
### Ejemplo 6.2

Sea  $S_1$  la porción del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  entre  $z = 0$  y  $z = 1$ . Entonces  $S_1$  se puede parametrizar como,

$$S: \mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + (x^2 + y^2) \hat{\mathbf{k}}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

También,  $z = x^2 + y^2$  se podría ver como circunferencias de radio  $\sqrt{z}$ , entonces

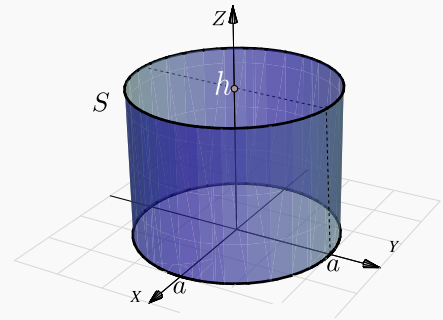
$$S: \mathbf{r}(\theta, z) = \sqrt{z} \cos t \hat{\mathbf{i}} + \sqrt{z} \sin t \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}, \quad \theta \in [0, 2\pi[ \text{ y } z \in [0, 1].$$



### Ejemplo 6.3

Sea  $S_1: x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq h$ .  $S_1$  es el cilindro de la figura. Esta superficie se puede parametrizar como

$$\mathbf{r}(\theta, z) = a \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}, \quad \text{con } (\theta, z) \in D = [0, 2\pi[ \times [0, h].$$



## 6.2 Superficies regulares.

Sea  $S: \mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \hat{\mathbf{i}} + y(u, v) \hat{\mathbf{j}} + z(u, v) \hat{\mathbf{k}}$  con  $(u, v) \in D$ .  $\mathbf{r}$  es de clase  $C^1$  si  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  y  $z(u, v)$  son de clase  $C^1$  (funciones continuamente diferenciables). En este caso, consideremos los vectores  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$  y  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$ ,

**Definición 6.1**

Sea  $D$  abierto y sea  $S$  una superficie parametrizada por  $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$ . Decimos que  $S_1$  es una superficie *regular* en  $(u, v)$  si  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$ . Si  $S_1$  se puede partir en un número finito de elementos regulares se dice regular a trozos.

**Caso  $z = f(x, y)$** 

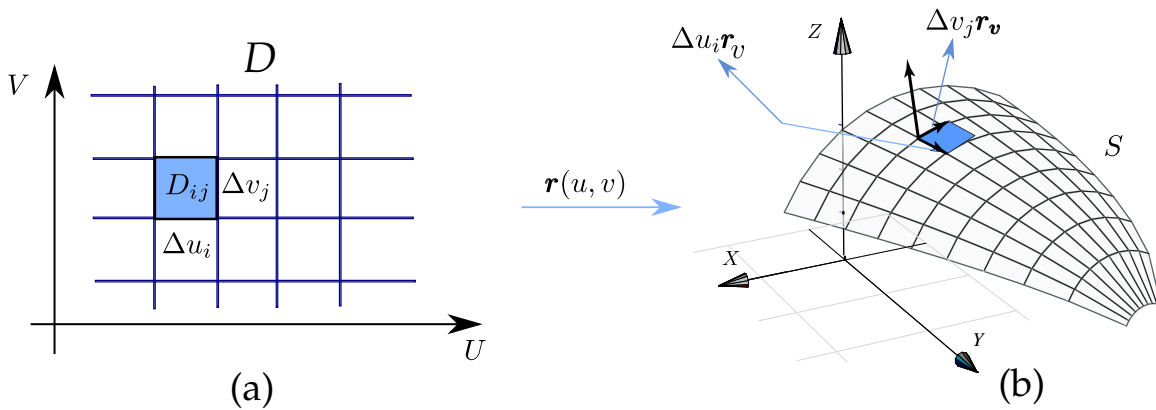
Observe que si  $S : z = f(x, y)$  entonces si  $\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + f(x, y) \hat{\mathbf{k}}$  en  $D$  con  $f_x$  y  $f_y$  continuas,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-f_x, -f_y, 1) \neq \mathbf{0}.$$

con lo cual la superficie  $S_1$  es regular en  $D$ .

**6.3 Área de una superficie.**

La idea de la definición de área de una superficie paramétrica es la siguiente.



Partimos  $D$  en  $n$  rectángulos como (a). El rectángulo  $D_{ij}$  tiene área  $\Delta u_i \Delta v_j$ . En cada  $D_{ij}$  se toma el punto  $(u_i, v_j)$  más cercano al origen. En el punto  $\mathbf{r}(u_i, v_j)$  de la superficie  $S_1$ , el plano tangente tiene ecuación

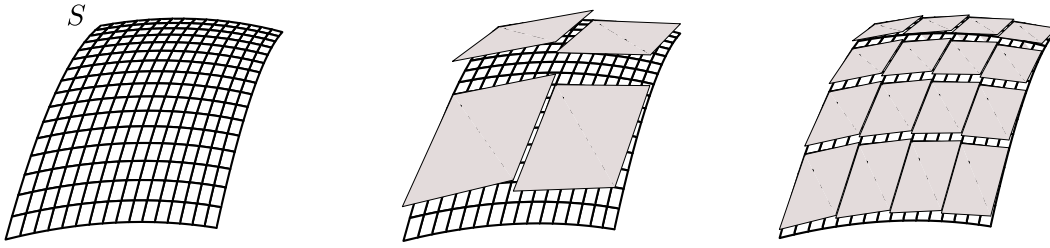
$$T_i : \mathbf{r}(u_i, v_j) + t \mathbf{r}_u(u_i, v_j) + s \mathbf{r}_v(u_i, v_j), \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}.$$

La porción de superficie de  $S_1$  que es imagen de  $D_{ij}$  se puede aproximar con un paralelogramo en el plano tangente de lados  $\Delta u_i \mathbf{r}_u$ ,  $\Delta v_j \mathbf{r}_v$ . Como es sabido, este paralelogramo tiene área

$$\|\Delta u_i \mathbf{r}_u \times \Delta v_j \mathbf{r}_v\|$$

Sacando los escalares y sumando el área de todos los paralelogramos tenemos

$$\text{Área de la superficie } S \approx \sum \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u_i \Delta v_j$$


**Definición 6.2 (Área de una superficie).**

Sea  $S_1$  una superficie regular definida sobre un conjunto abierto medible  $D$ . Digamos que

$$S: \mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \hat{\mathbf{i}} + y(u, v) \hat{\mathbf{j}} + z(u, v) \hat{\mathbf{k}} \text{ con } (u, v) \in D.$$

Entonces, el área  $A_S$  de la superficie  $S$  es

$$A_S = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

Si  $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$  es la unión finita de superficies parametrizadas que se intersecan a lo sumo en curvas que forman parte de sus fronteras entonces,

$$A_S = A_{S_1} + A_{S_1} + A_{S_2} + \dots + A_{S_k}$$

**Caso  $S: z = f(x, y)$ ,**

Si  $S: z = f(x, y)$ , una parametrización es  $\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + f(x, y) \hat{\mathbf{k}}$  y  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$ . Entonces,

$$A_S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$$

**Caso  $S: F(x, y, z) = 0$** 

Si  $S: F(x, y, z) = 0$  donde  $S$  se puede proyectar *uno a uno* sobre una región  $D$  del plano  $XY$  y si  $F$  define a  $z$  como función de  $x$  e  $y$  y si  $F_z \neq 0$  entonces  $z_x = -F_x/F_z$  y  $z_y = -F_y/F_z$  y la fórmula anterior quedaría

$$A_S = \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dA$$

**Área de una superficie—Proyectando sobre varios planos.**

Asumimos que  $S$  es una superficie regular y que  $F$  es continuamente diferenciable e inyectiva sobre  $D$ .

**a) Proyectando sobre  $XY$ :** Si  $S : z = z(x, y)$  o  $S : F(x, y, z) = 0$ , con  $(x, y) \in D_{xy}$

$$A_S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA \quad \text{o, en versión implícita,} \quad A_S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}} dA \quad \text{con } F_z \neq 0 \text{ en } D_{xy}$$

**b) Proyectando sobre  $XZ$ :** Si  $S : y = y(x, z)$  o  $S : F(x, y, z) = 0$ , con  $(x, z) \in D_{xz}$

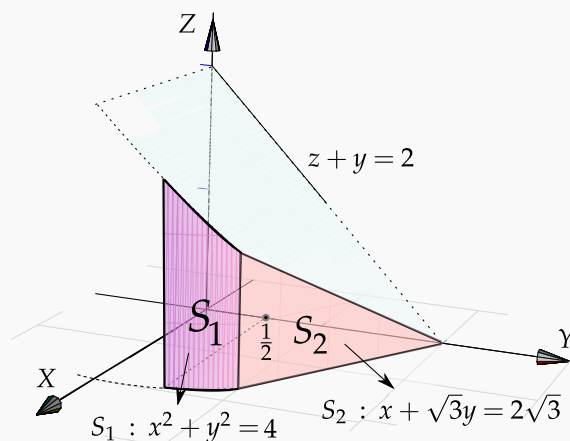
$$A_S = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dA \quad \text{o, en versión implícita,} \quad A_S = \iint_{D_{xz}} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_y^2}} dA \quad \text{con } F_y \neq 0 \text{ en } D_{xz}$$

**c) Proyectando sobre  $YZ$ :** Si  $S : x = x(y, z)$  o  $S : F(x, y, z) = 0$ , con  $(y, z) \in D_{yz}$

$$A_S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dA \quad \text{o, en versión implícita,} \quad A_S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_x^2}} dA \quad \text{con } F_x \neq 0 \text{ en } D_{yz}$$

**Ejemplo 6.4** (Usando coordenadas rectangulares).

**Plantear** las integrales que dan el área de la superficie  $S = S_1 + S_2$  tal y como se muestra en la figura de la derecha.



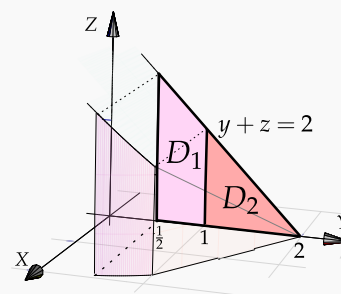
**Solución:** Podemos proyectar sobre el plano  $YZ$ . Tenemos

$$A_S = A_{S_1} + A_{S_2}$$

La superficie  $S_1$  tiene ecuación  $F(x, y, z) = 0$  con  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$

La superficie  $S_2$  tiene ecuación  $x = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}y$ . Entonces,

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_{D_1} \sqrt{\frac{\mathbf{F}_x^2 + \mathbf{F}_y^2 + \mathbf{F}_z^2}{\mathbf{F}_x^2}} dA + \iint_{D_2} \sqrt{x_y^2 + x_z^2 + 1} dA \\ &= \int_{1/2}^1 \int_0^{2-y} \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 + 0^2}{4x^2}} dz dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} \sqrt{3 + 0 + 1} dy dz \\ &= \int_{1/2}^1 \int_0^{2-y} \sqrt{\frac{4(4-y^2) + 4y^2 + 0^2}{4(4-y^2)}} dz dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} 2 dy dz \approx 2.18703 \end{aligned}$$



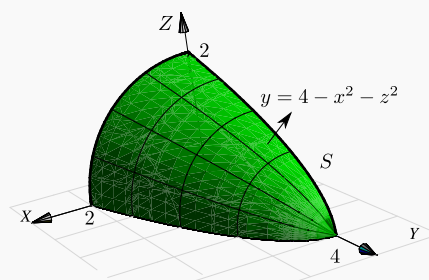
### Ejemplo 6.5 (Usando coordenadas rectangulares).

Calcular el área de la superficie  $S: y + x^2 + z^2 = 4$ .

**Solución:** La proyección sobre  $XZ$  es el círculo  $x^2 + z^2 = 4$  y la ecuación de la superficie es

$$S: y = 4 - x^2 - y^2.$$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)





**Primera manera:**

$$\begin{aligned}
 A_S &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dA \\
 &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dA, \text{ cambio de variable: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta, \end{cases} \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r \sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{(1 + 4r^2)^{3/2}}{12} \right|_0^2 d\theta = \frac{\pi}{24} (17\sqrt{17} - 1) \approx 9.04423.
 \end{aligned}$$

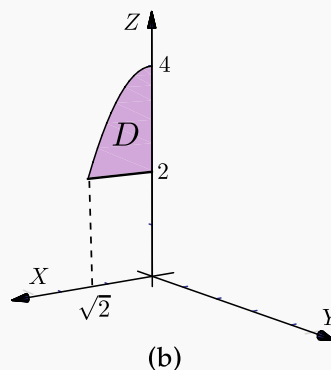
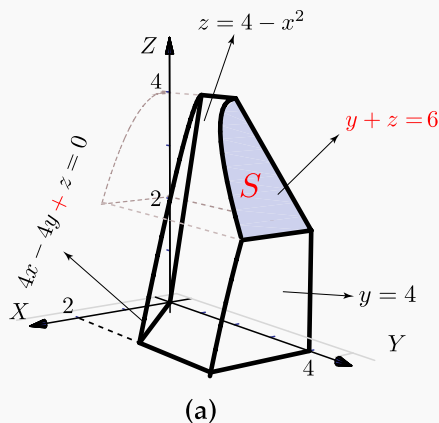
**Segunda manera:** Podemos usar la parametrización  $\mathbf{r}(y, \theta) = \sqrt{4-y} \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{4-y} \sin \theta \hat{\mathbf{k}}$  con  $y \in [0, 4]$  y  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

$$A_S = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| dy d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \sqrt{17/4 - y} dy d\theta = \frac{\pi}{24} (17\sqrt{17} - 1).$$

### Ejemplo 6.6

Calcular el área de la superficie  $S$ :  $y + z = 6$  tal y como se ve en la figura (a).

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Solución:** Como  $S$ :  $y(x, z) = 6 - z$ , usamos la parametrización  $\mathbf{r}(x, z) = x \hat{\mathbf{i}} + (6 - z) \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$  sobre la región  $D$  definida por  $x \in [0, \sqrt{2}]$  y  $2 \leq z \leq 4 - x^2$ . Entonces  $y_x = 0$  y  $y_z = -1$ . La proyección sobre  $D_{xz}$  se ve en la figura

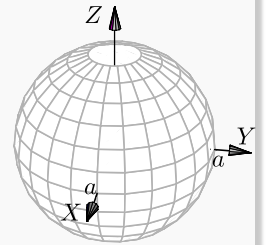
(b).

$$\begin{aligned}
 A_S &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dA \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{4-x^2} \sqrt{2} dz dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}(4-x^2) dx = 20/3
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.7** (Parametrizando con coordenadas esféricas y con coordenadas rectangulares).

Calcular el área de la superficie de la esfera  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Solución:** Vamos a calcular de dos maneras, parametrizando con coordenadas esféricas y parametrizando con coordenadas rectangulares (más complicado).



**Primera manera: Coordenadas esféricas.** La esfera la podemos parametrizar con coordenadas esféricas,

$$S: \mathbf{r}(\theta, \varphi) = a \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + a \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + a \cos \varphi \hat{\mathbf{k}}, \text{ con } (\theta, \varphi) \in D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (-a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, 0) \\
 \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= (a \cos \theta \cos \varphi, a \sin \theta \cos \varphi, -a \sin \varphi)
 \end{aligned}
 \Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| = a^2 \sin \varphi$$

$$A_S = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 4a^2\pi.$$

**Segunda manera: Coordenadas rectangulares.** Usamos la parametrización  $\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \hat{\mathbf{k}}$ . Solo vamos a calcular el área de la parte superior de la esfera. El área total la obtenemos multiplicando por dos.

$$\begin{aligned}
 \bullet z_x &= -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\
 \bullet z_y &= -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}
 \end{aligned}
 \Rightarrow A_S = 2 \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA = 2 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dA$$

Conviene hacer cambio de variable y usar coordenadas polares. Observe que las derivadas se indefinen en la frontera del círculo (si  $r = a$ ). La integral se calcula desde 0 hasta  $r = \epsilon$  con  $0 < \epsilon < a$ . Al final hacemos  $\epsilon \rightarrow a$ .

$$\begin{aligned} A_S &= 2 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a - x^2 - y^2}} dA \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\epsilon \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \quad \text{si } \epsilon \rightarrow a \text{ (integral impropia!)} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} a^2 d\theta = 4a^2\pi \end{aligned}$$

- Para calcular  $\int_0^\epsilon \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr$  hacemos  $u = a^2 - r^2$ ,  $du = -2r dr$ . Queda
 
$$-\frac{1}{2} \int_{a^2}^{a^2 - \epsilon^2} \frac{a}{\sqrt{u}} du = -\frac{a}{2} \frac{\sqrt{u}}{1/2} \Big|_{a^2}^{a^2 - \epsilon^2} = a^2 - a\sqrt{a^2 - \epsilon^2} \rightarrow a^2 \quad \text{si } \epsilon \rightarrow a.$$

**Nota:** Observe que  $A_S$  también se pudo calcular con  $A_S = \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} dA$ . En este caso  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ . Puesto que esta fórmula solo se puede usar si la proyección es *uno a uno* con la superficie, solo podemos considerar la parte superior de la esfera. Pasando a polares, la integral queda igual al cálculo anterior.

### Ejemplo 6.8 (Usando una parametrización de $S$ ).

Calcular el área del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  de altura  $h$ , es decir  $0 \leq z \leq h$ .

**Solución:** Como ya vimos, la parametrización de esta superficie es

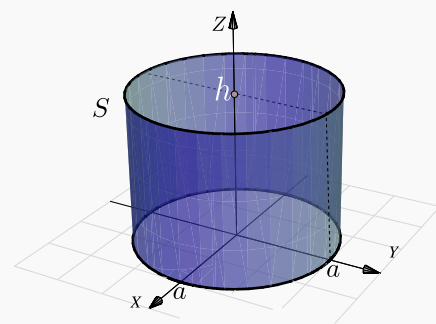
$$\mathbf{r}(\theta, z) = a \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}, \quad (\theta, z) \in D = [0, 2\pi] \times [0, h].$$

Luego,

- $\mathbf{r}_\theta = (-a \sin \theta, a \cos \theta, 0)$
- $\mathbf{r}_z = (0, 0, 1)$
- $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\| = \|(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)\| = a.$

Entonces,

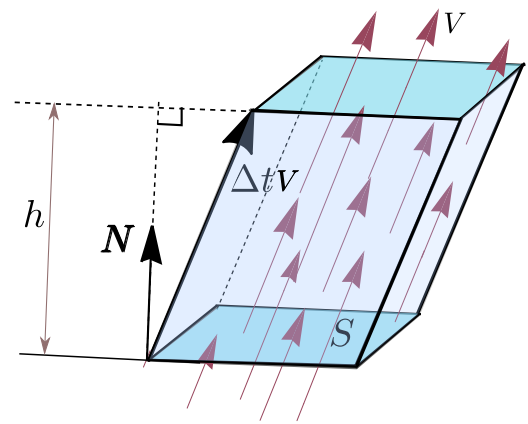
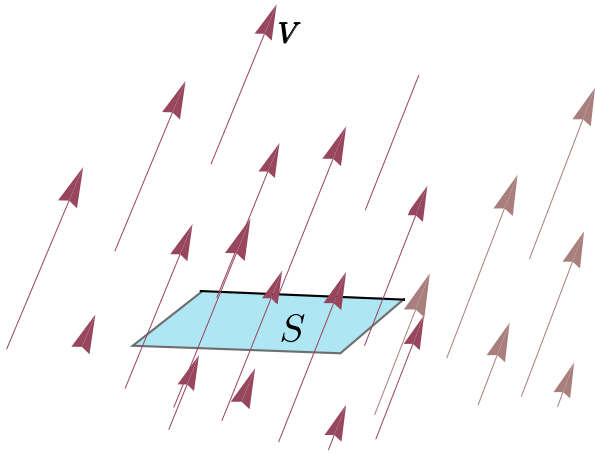
$$A_S = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\| dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^h a dz d\theta = 2h\pi a.$$



### 6.4 Integral sobre una superficie.

Supongamos que tenemos una región plana  $S$  y queremos determinar la cantidad de “fluido” a través de  $S$  (se supone que el fluido puede atravesar la región). La cantidad de fluido es “densidad por volumen.” Si el flujo se mueve con velocidad constante  $\mathbf{V}$ , entonces durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  llenará un cuboide de base  $S$  y “extensión” (arista)  $\Delta t \mathbf{V}$ . El volumen de este cuboide es “área de la base”  $\Delta S$  por “altura”, la altura  $h$  se calcula con la proyección de  $\mathbf{V}$  sobre el vector normal unitario a  $S$ , denotado  $\mathbf{N}$ . Como se sabe,  $h = \Delta t \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}$ , entonces

$$V_S = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \Delta S \Delta t$$



La masa del fluido es  $\Delta M = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \Delta S \Delta t$  donde  $\rho$  es la densidad. La *densidad del fluido* es  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$  y el *flujo total* es la masa de fluido que pasa a través de  $S$  en una unidad de tiempo:  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \Delta S$  kilogramos por segundo.

Ahora digamos que tenemos una corriente de fluido en el espacio con velocidad  $\mathbf{V}(x, y, z)$  y densidad (masa por unidad de volumen)  $\rho(x, y, z)$  en cada punto  $(x, y, z)$ . El vector densidad de flujo

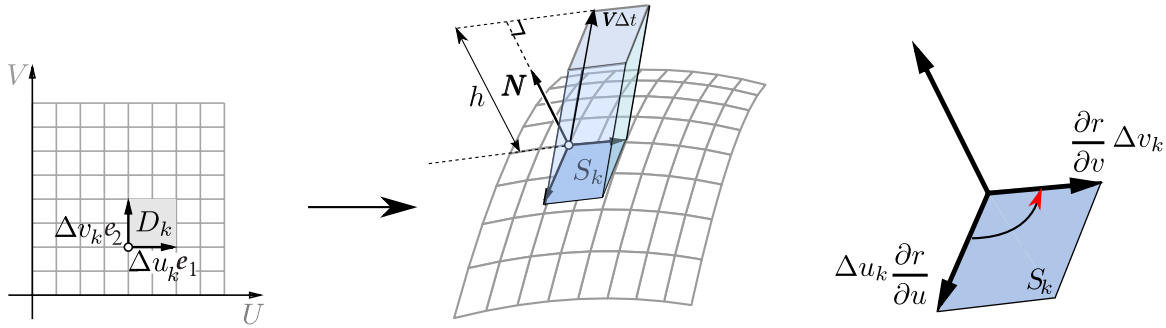
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{V}(x, y, z) \rho(x, y, z)$$

tiene la misma dirección que la velocidad y nos dice cuánta masa de fluido circula por el punto  $(x, y, z)$  en la dirección de  $\mathbf{V}(x, y, z)$ , por unidad de área y de tiempo.

Para sugerir una *definición razonable* de cómo medir la masa total de fluido que atraviesa una determinada superficie  $S_1$  en el tiempo, se considera la superficie  $S_1$  parametrizada por  $\mathbf{r}(u, v)$  en una región rectangular  $D$ . Sea  $\mathbf{N}$  el vector unitario normal que tiene la misma dirección que el producto vectorial fundamental,

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \quad (6.1)$$

Para medir la cantidad de fluido que pasa a través de  $S_1$  en la unidad de tiempo y en la dirección de  $\mathbf{N}$ , se des-compone el rectángulo  $D$  en  $m$  subrectángulos  $D_1, D_2, \dots, D_m$ . Sean  $S_1, S_2, \dots, S_m$  las correspondientes porciones de superficie en  $S$ . Llamamos  $\Delta S_k$  a la  $k$ -ésima porción  $S_k$ . Si la densidad  $\rho$  y la velocidad  $\mathbf{V}$  son constantes en  $S_k$  y  $S_k$  es suficientemente plana, el fluido que atraviesa  $S_k$  en la unidad de tiempo ocupa un sólido cilíndrico oblicuo con base  $S_k$  y eje determinado por el vector velocidad  $\mathbf{V}$ .



Como el área de  $S_k$  es  $\Delta S_k = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u_k \Delta v_k$ , el fluido sobre  $S_k$  ocupa un sólido cilíndrico de volumen (base por altura),

$$\Delta S_k \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \Delta S_k \approx \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u_k \Delta v_k$$

Esto sugiere que la suma  $\sum_{k=1}^m \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \Delta S_k$  puede ser una aproximación aceptable de la masa total de fluido que atraviesa  $S_k$  en la unidad de tiempo.

Si ponemos  $f(x, y, z) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ , tenemos la siguiente definición (la notación  $\overline{D}$  significa  $\overline{D} = \text{interior}(D) \cup \partial D$ )

### Definición 6.3

Sea  $D$  un abierto medible y  $S_1$  una superficie regular parametrizada por la función  $\mathbf{r}(u, v)$ , de clase  $C^1$  en  $\overline{D}$ , donde  $(u, v) \in D$ , de modo que  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| > 0$  para todo  $(u, v) \in D$ ,  $r$  es una biyección entre  $D$  y  $S$ .

Sea  $f(x, y, z)$  una función definida y acotada sobre  $\overline{S}$ . Se define la integral de superficie de  $f$  sobre  $S_1$  por

$$\iint_{S_1} f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

Si  $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$  es la unión finita de superficies parametrizadas que se intersecan a lo sumo en curvas que forman parte de sus fronteras entonces,

$$\iint_{S_1} g(x, y, z) dS = \sum_i^m \iint_{S_i} g(x, y, z) dS$$

● **Integral de superficie con coordenadas rectangulares.**

**Caso**  $S_1 : z = f(x, y)$

Si  $S_1 : z = f(x, y)$  con  $f$  de clase  $C^1$  sobre  $\bar{D}$ , se puede parametrizar  $S_1$  con  $\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + f(x, y) \hat{\mathbf{k}}$  y entonces

$$\iint_{S_1} g(x, y, z) dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

**Integral superficie–Proyectando sobre varios planos.**

Asumimos que  $S$  es una superficie regular y que  $F$  es continuamente diferenciable e inyectiva sobre  $D$ .

**a) Proyectando sobre  $XY$ :** Si  $S : z = z(x, y)$  o  $S : F(x, y, z) = 0$ , con  $(x, y) \in D_{xy}$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} g(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA,$$

o, en versión implícita,

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} g(x, y, z(x, y)) \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2}} dA \text{ con } F_z \neq 0 \text{ en } D_{xy}$$

**b) Proyectando sobre  $XZ$ :** Si  $S : y = y(x, z)$  o  $S : F(x, y, z) = 0$ , con  $(x, z) \in D_{xz}$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} g(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dA$$

o, en versión implícita,

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} g(x, y(x, z), z) \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_y^2}} dA \text{ con } F_y \neq 0 \text{ en } D_{xz}$$

**c) Proyectando sobre  $YZ$ :** Si  $S : x = x(y, z)$  o  $S : F(x, y, z) = 0$ , con  $(y, z) \in D_{yz}$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} g(\mathbf{x}(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dA$$

o, en versión implícita,

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} g(\mathbf{x}(y, z), y, z) \sqrt{\frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_x^2}} dA \text{ con } F_x \neq 0 \text{ en } D_{yz}$$

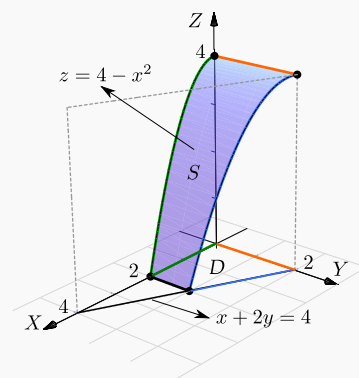
### Ejemplo 6.9

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

Calcular la integral de superficie  $\iint_{S_1} \frac{z + x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dS$  con  $S_1$  la porción de la superficie  $z = 4 - x^2$  limitada por el plano  $x + 2y = 4$ , como se muestra en la figura

**Solución:** En coordenadas rectangulares,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$ ,

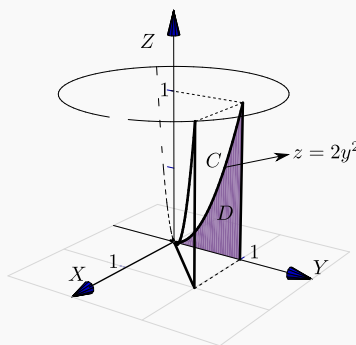
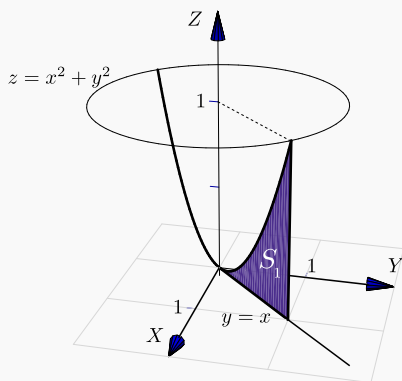
$$\iint_{S_1} \frac{z + x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dS = \iint_D \frac{4 - x^2 + x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} \sqrt{1 + 4x^2} dA = \int_0^2 \int_0^{2-x/2} 4 dy dx = 12.$$



### Ejemplo 6.10 (Integrando sobre YZ).

Calcular la integral de superficie  $\iint_{S_1} 2xyz dS$  con  $S_1$  la parte del plano  $y = x$  limitado por  $z = x^2 + y^2$ , como se muestra en la figura.

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



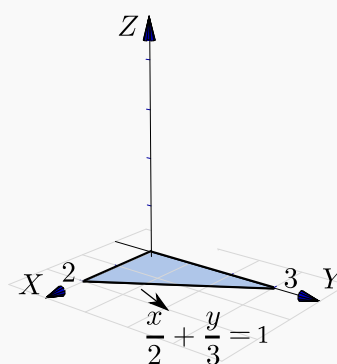
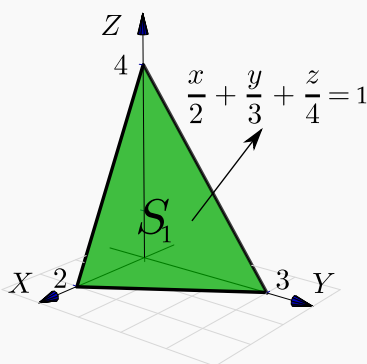
**Solución:** La superficie  $S_1$  solo se puede proyectar en los planos  $XZ$  o en  $YZ$ . La curva  $C$  de la proyección en el plano  $YZ$  se obtiene como la intersección del plano y el paraboloide:  $C: y = x \cap z = x^2 + y^2 \Rightarrow C: z = 2y^2$ .

Como proyectamos en  $YZ$ , entonces  $S_1: x = y$  y  $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{2}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} 2xyz \, dS &= \iint_D 2xyz \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2y^2} 2y^2 z \sqrt{2} \, dz \, dy = 4\sqrt{2}/7 \end{aligned}$$

### Ejemplo 6.11

Calcular la integral de superficie  $\iint_{S_1} z + 2x + \frac{4}{3}y \, dS$  con  $S_1$  la parte del plano  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  situada en el primer octante.



**Solución:** Como  $S_1: z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$  entonces  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{61}/3$ . Las variables de integración son  $x$  e  $y$  así que debemos sustituir  $z$  en el integrando,

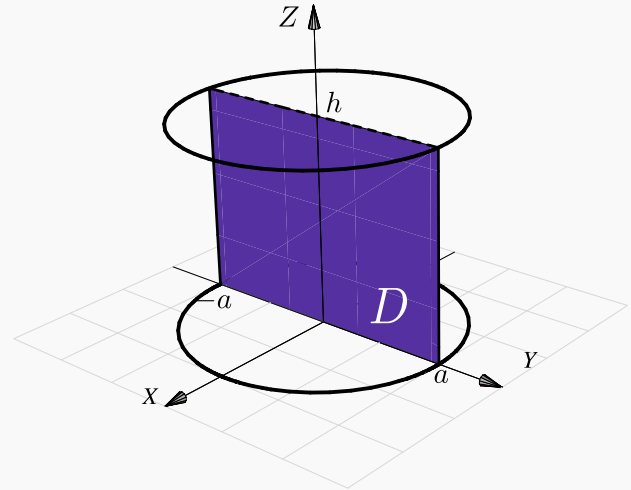
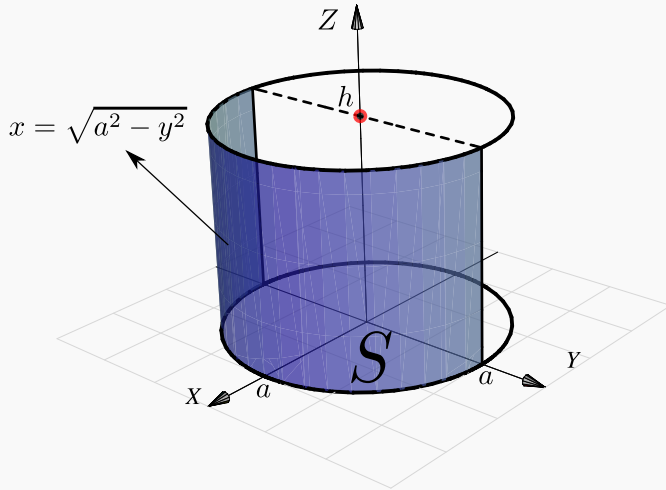
$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z + 2x + \frac{4}{3}y \, dS &= \iint_D (z + 2x + \frac{4}{3}y) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{3-3x/2} \left( 4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y \right) \frac{\sqrt{61}}{3} \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{3-3x/2} 4 \frac{\sqrt{61}}{3} \, dy \, dx = 4\sqrt{61}. \end{aligned}$$



**Ejemplo 6.12**

Sea  $a > 0$  y sea  $I = \iint_{S_1} \frac{1}{a^2 + z^2} dS$  con  $S_1$  el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  limitado por los planos  $z = 0$  y  $z = h$ .

- a.) Calcular  $I$  usando coordenadas rectangulares,  $S_1 : x = \sqrt{a^2 - y^2}$ .  
 b.) Calcular  $I$  usando la parametrización  $S_1 : \mathbf{r}(\theta, z) = a \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$ ,  $(\theta, z) \in D = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, h]$ .

**Solución:**

- a.) Proyectando sobre  $YZ$ ,  $S_1 : x = \sqrt{a^2 - y^2}$ . En este caso,  $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \frac{1}{a^2 + z^2} dS &= \iint_D \frac{1}{a^2 + z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy dz \\ &= \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy \int_0^h \frac{1}{a^2 + z^2} dz \quad (\text{la primera integral es impropia}), \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} a \arcsen\left(\frac{y}{a}\right) \Big|_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \cdot \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{z}{a}\right) \Big|_0^h = \left(a \frac{\pi}{2} + a \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{h}{a}\right). \end{aligned}$$

- b.) En este caso, esta es la manera fácil. Usando la parametrización uno-uno

$$\mathbf{r}(\theta, z) = a \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}, \quad (\theta, z) \in D = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, h].$$

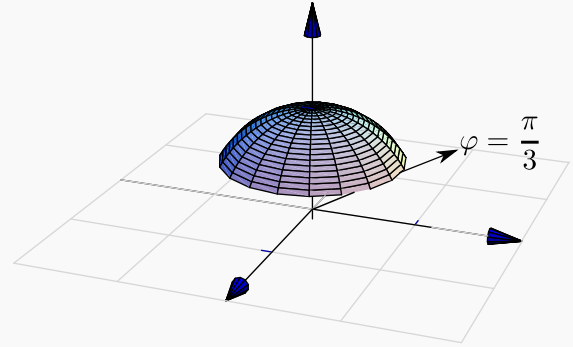
- $\mathbf{r}_\theta = (-a \sin \theta, a \cos \theta, 0)$
- $\mathbf{r}_z = (0, 0, 1)$
- $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\| = \|(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)\| = a.$

$$\iint_{S_1} \frac{1}{a^2 + z^2} dS = \iint_D \frac{1}{a^2 + z^2} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\| dz d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^h \frac{a}{a^2 + z^2} dz d\theta = \pi \arctan\left(\frac{h}{a}\right).$$

Note que usando esta parametrización no tenemos problemas de singularidades.

### Ejemplo 6.13 (Usando coordenadas esféricas).

Considere la integral de superficie  $I = \iint_{S_1} \ln z dS$  con  $S_1$  el casquete de esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ .



a.) Calcular  $I$  usando la parametrización (coordenadas esféricas)

$$S_1 : \mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \text{ con } (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[ \times [0, \pi/3].$$

b.) Calcular  $I$  usando la parametrización

$$S_1 : \mathbf{r}(z, \theta) = \sqrt{1 - z^2} \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sqrt{1 - z^2} \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}} \text{ con } \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \text{ y } \theta \in [0, 2\pi[.$$

c.) Calcular  $I$  usando coordenadas rectangulares

#### Solución:

a.) Vamos a usar una parametrización del casquete de la esfera basada en coordenadas esféricas. Observe que los parámetros son  $\theta$  y  $\varphi$ . En este caso,  $\rho = 1$ .

$$\begin{cases} x = \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta \\ z = \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \text{ con } (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[ \times [0, \pi/3].$$

El valor  $\varphi = \pi/3$  se obtiene de resolver  $z = 1 \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2}$ . Luego,

- $r_\theta = (-\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi, 0)$
- $r_\varphi = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$
- $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| = \sin \varphi > 0 \text{ en } [0, \pi/3],$

Las variables de integración son  $\varphi$  y  $\theta$ , así que debemos sustituir  $z$  en el integrando. Para resolver la integral se hace la sustitución  $u = \cos \varphi$ ,

$$\iint_{S_1} \ln z \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \ln(\cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_1^{\cos \pi/3} \ln(u) \, du \, d\theta = \pi (\ln 2 - 1)$$

b.) Como  $S_1: x^2 + y^2 = 1 - z^2$ , con  $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ ; podemos parametrizar el casquete como

$$\mathbf{r}(z, \theta) = \sqrt{1 - z^2} \cos t \, \hat{\mathbf{i}} + \sqrt{1 - z^2} \sin t \, \hat{\mathbf{j}} + z \, \hat{\mathbf{k}} \text{ con } \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \text{ y } \theta \in [0, 2\pi[.$$

$$\bullet \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = \left\| (-\sqrt{1 - z^2} \cos t, -\sqrt{1 - z^2} \sin t, -z) \right\| = 1$$

En este caso las variables de integración son  $z$  y  $\theta$  así que no hay nada que sustituir en la integral,

$$\iint_{S_1} \ln z \, dS = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \ln(z) \cdot 1 \, dz \, d\theta = \pi (\ln 2 - 1)$$

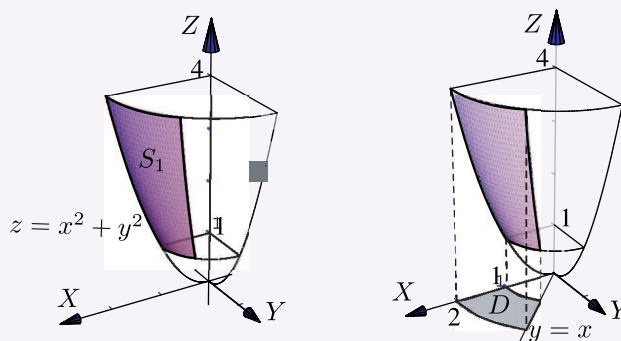
c.) En coordenadas rectangulares  $S_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , con  $z \in [1/2, 1]$ . Entonces la proyección sobre el plano  $XY$  está entre las circunferencias  $x^2 + y^2 = 3/4$  y  $x^2 + y^2 = 1$ . Las variables de integración son  $x$  e  $y$  así que debemos sustituir  $z$  en el integrando,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \ln z \, dS &= \iint_D \ln(z) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dA \\ &= \iint_D \log\left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}} \, dA, \quad (\text{pasamos a polares}), \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{3/4}}^1 \log(\sqrt{1 - r^2}) \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \, dr \, d\theta \quad (\text{usamos la sustitución } u^2 = 1 - r^2), \\ &= \pi (\ln 2 - 1) \quad (\text{la integral es impropia, se calcula con } u \rightarrow 0). \end{aligned}$$

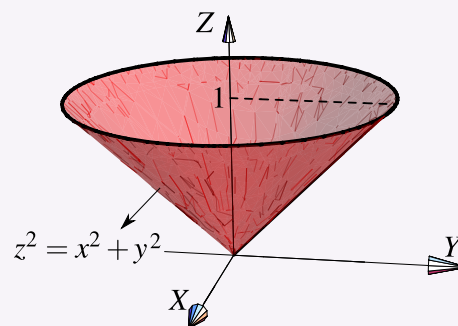
## 25

## Ejercicios

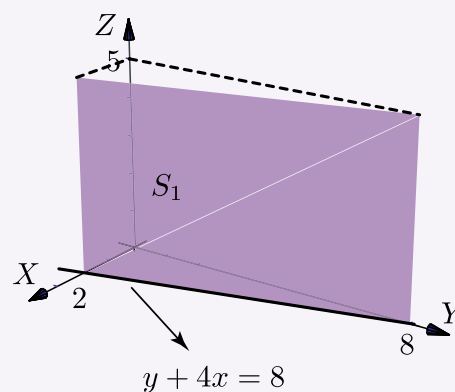
**6.1** Determine el área de la superficie  $S_1$  de ecuación  $z = x^2 + y^2$  que se encuentra limitada por los planos  $z = 4$ ,  $z = 1$ ,  $y = x$  y el plano  $y = 0$ , tal y como se muestra en la figura



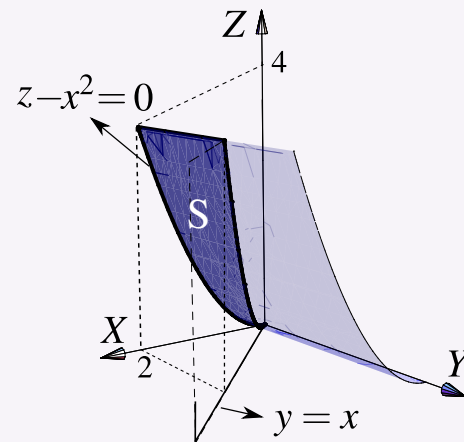
**6.2** Sea  $S$  la superficie del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  comprendida entre  $z = 0$  y  $z = 1$ . Usando integral de superficie, calcular el área de la superficie  $S$ .



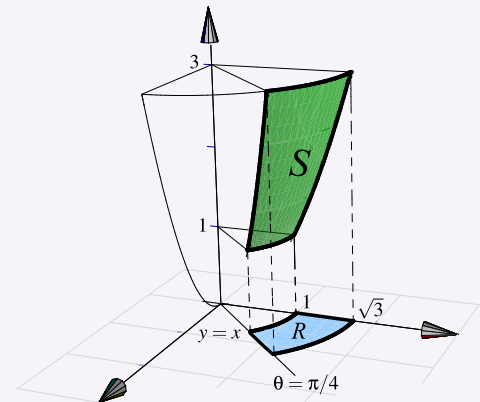
**6.3** Calcule  $\iint_{S_1} x^2 - 2y + z \, dS$  donde  $S_1$  es la superficie de la figura.



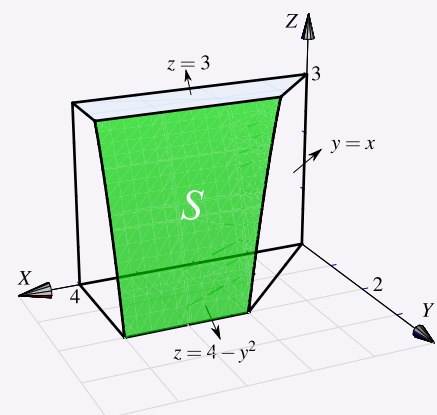
**6.4** La superficie  $S$  es el trozo del cilindro  $z - x^2 = 0$  que está limitado por los planos  $y = 0$ ,  $y = x$  y  $z = 4$ , en el primer octante. La Superficie  $S$  se muestra en la figura que sigue. Calcule el área de  $S$ .



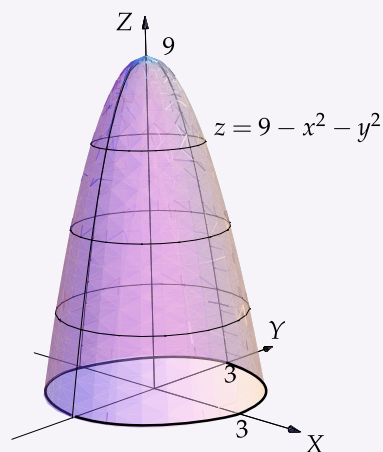
**6.5** Determine el área de la superficie  $S$  de ecuación  $z = x^2 + y^2$  que se encuentra limitada por los planos  $z = 1$ ,  $z = 3$ ,  $y = x$  y el plano  $x = 0$ , tal y como se muestra en la figura.



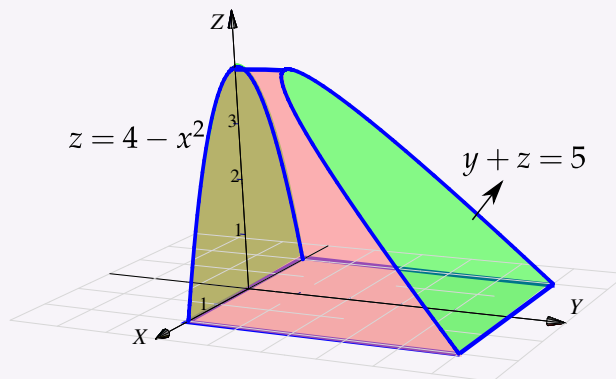
**6.6** Sea  $F(x, y, z) = (xy, x, z+1)$  y sea  $S$  la porción de superficie de ecuación  $z = 4 - y^2$  limitada por las superficies  $z = 3$ ,  $x = 4$ ,  $z = 0$  y  $x = y$ , tal y como se muestra en la figura de la derecha. Calcular  $\iint_S 2xy + z + 1 \, dS$



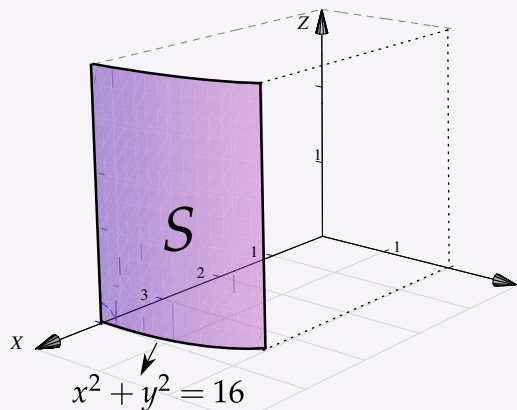
**6.7** Calcule la integral de superficie  $\iint_S (x^2 + y^2 + z) dS$  donde  $S$  es la superficie de ecuación  $z = 9 - x^2 - y^2$ , limitada por el plano  $z = 0$  tal y como se muestra en la figura a la derecha.



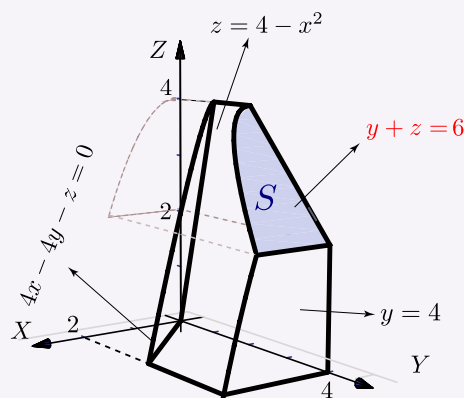
**6.8** Sea  $Q$  el sólido que se muestra en la figura a la derecha y sea  $S$  la frontera de  $Q$ , es decir,  $S = \partial Q$ . Calcule  $\int_S F \cdot N dS$  donde  $F(x, y, z) = (x^3 + \sin z, x^2 y + \cos z, \tan(x^2 + y^2))$



**6.9** Calcule el área de la superficie  $S$  tal y como se muestra en la figura a la derecha.



**6.10** Calcule el área de la superficie  $S$  tal y como se muestra en la figura a la derecha.



## 6.5 Integral de flujo.

Si  $\mathbf{F}$  es la densidad de flujo de una corriente de fluido y  $\mathbf{N}$  es el vector unitario normal a  $S_1$  definido por

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|},$$

entonces la masa total de fluido que pasa por  $S_1$  por unidad de tiempo en la dirección de  $\mathbf{N}$  es

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv$$

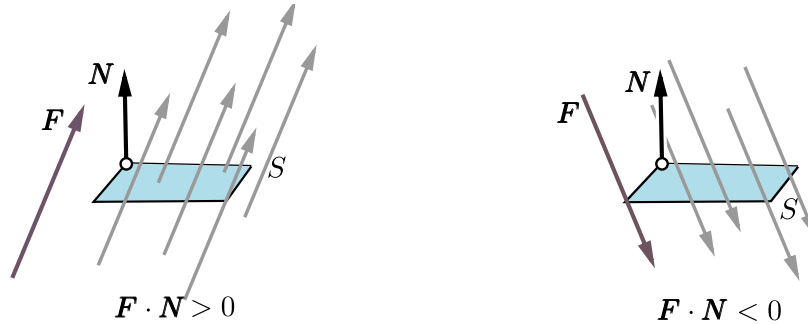
### Caso $z = f(x, y)$

Como consecuencia tenemos que si  $S: z = f(x, y)$  con  $f$  de clase  $C^1$  sobre  $\overline{D}$ , se puede parametrizar  $S_1$  con  $\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + f(x, y) \hat{\mathbf{k}}$  y entonces

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{F}(x, y, z) \cdot (-f_x, -f_y, 1) dx dy$$

**Orientación.** Nuestra expresión para el flujo total lleva implícita la escogencia de uno de los dos vectores normales unitarios. Escoger un vector unitario para la región  $S_1$  es equivalente a “orientar” la región (como veremos más adelante). Esta escogencia de  $\mathbf{N}$  decide el signo de  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ .

En lo que sigue, siempre vamos a escoger  $\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}$ .



### Integral de Flujo–Proyectando sobre varios planos.

- a) **Proyectando sobre XY:** Si  $S : z = z(x, y)$  o  $S : G(x, y, z) = 0$ , con  $(x, y) \in D_{xy}$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D_{xy}} \mathbf{F}(x, y, z(x, y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1) dA,$$

o, en versión implícita,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D_{xy}} \mathbf{F}(x, y, z(x, y)) \cdot (G_x, G_y, G_z) \frac{1}{G_z} dA \text{ con } G_z \neq 0 \text{ en } D_{xy}$$

- b) **Proyectando sobre XZ:** Si  $S : y = y(x, z)$  o  $S : G(x, y, z) = 0$ , con  $(x, z) \in D_{xz}$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D_{xz}} \mathbf{F}(x, y(x, z), z) \cdot (-y_x, 1, -y_z) dA$$

o, en versión implícita,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D_{xz}} \mathbf{F}(x, y(x, z), z) \cdot (G_x, G_y, G_z) \frac{1}{G_y} dA \text{ con } G_y \neq 0 \text{ en } D_{xz}$$

- c) **Proyectando sobre YZ:** Si  $S : x = x(y, z)$  o  $S : G(x, y, z) = 0$ , con  $(y, z) \in D_{yz}$



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D_{yz}} \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot (1, -x_y, -x_z) dA$$

o, en versión implícita,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D_{yz}} \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot (G_x, G_y, G_z) \frac{1}{G_x} dA \text{ con } G_x \neq 0 \text{ en } D_{yz}$$

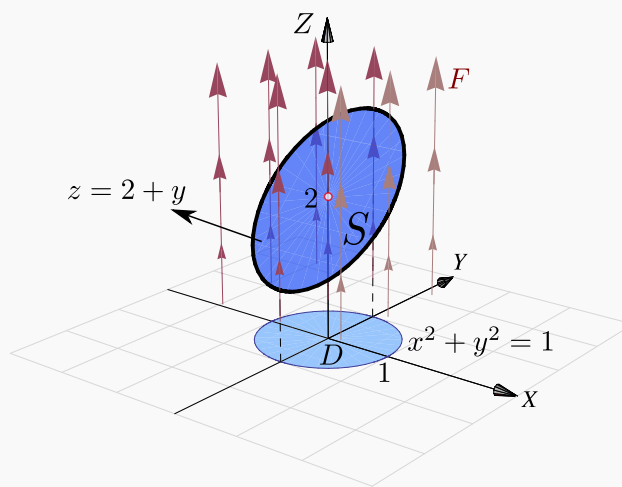
### Ejemplo 6.14

Calcular  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + 1) \hat{\mathbf{k}}$  y  $S_1$  es la superficie  $z = 2 + y$  con  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Solución:** La superficie  $S$  tiene ecuación  $z = 2 + y$ .  $D_{xy}$  es el círculo de radio 1. Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_{D_{xy}} (0, 0, z + 1) \cdot (-z_x, -z_y, 1) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (0, 0, 2 + y + 1) \cdot (0, -1, 1) dy dx \\ &= \iint_{D_{xy}} y + 3 dy dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3 + r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{6 + \sin(\theta)}{4} d\theta = 3\pi. \end{aligned}$$

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

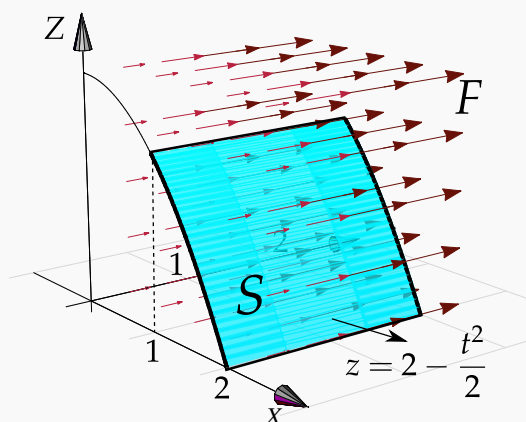


**Ejemplo 6.15**

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, y, 0)$  y  $S$  el cilindro  $z = 2 - \frac{x^2}{2}$ , desde  $y = 0$  hasta  $y = 2$ , como se ve en la figura.

Calcular  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$

**Solución:** Intuitivamente, el flujo *no pasa a través* de la superficie  $S$ , así que la integral de flujo debería ser 0.



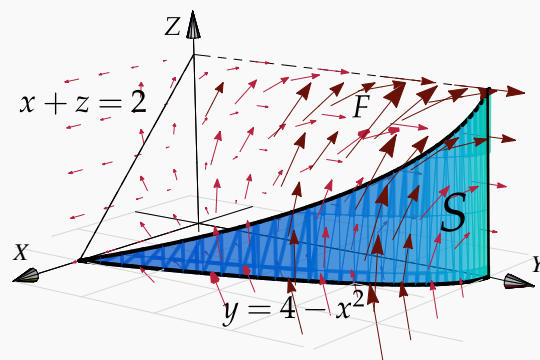
En este caso solo se puede proyectar sobre  $YZ$  o  $XY$ . La proyección sobre  $YZ$  es un rectángulo. Sea  $S: G(x, y, z) = 0$  con  $G(x, y, z) = z - 2 + \frac{x^2}{2}$ . Entonces,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D_{yz}} \mathbf{F} \cdot \frac{\nabla G}{G_x} dA = \int_0^2 \int_0^{3/2} (0, y, 0) \cdot (\mathbf{x}, 0, 1) \frac{1}{\mathbf{x}} dz dy = \int_0^2 \int_0^{3/2} 0 dz dy = 0$$

**Ejemplo 6.16**

Calcular  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, yz, xy)$  y  $S$  el cilindro de ecuación  $y = 4 - x^2$  limitado por el plano  $x + z = 2$ , tal y como se muestra en la figura de la derecha.

**Solución:** La superficie  $S$  tiene ecuación  $G(x, y, z) = 0$  con  $G(x, y, z) = y + x^2 + 4$ . La proyección de  $S$  sobre el plano  $XZ$  es un triángulo.



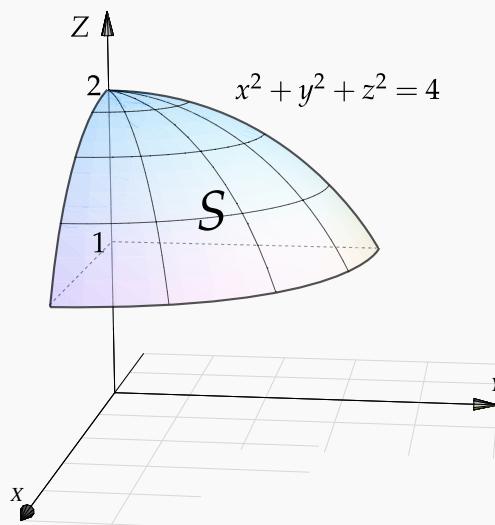
$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_{D_{xz}} (x, yz, xy) \cdot \frac{\nabla G}{G_y} dA \\
&= \iint_{D_{xz}} (x, yz, xy) \cdot (2x, 1, 0) dA \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} 2x^2 + yz \, dz dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} 2x^2 + (4-x^2)z \, dz dx = \frac{112}{15}
\end{aligned}$$

**Ejemplo 6.17**

Calcular  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xz \hat{\mathbf{i}} + yz^3 \hat{\mathbf{j}} + z^2 \hat{\mathbf{k}}$  y  $S$  es la superficie  $z^2 + y^2 + x^2 = 4$  entre  $z = 1$  y  $z = 2$ .

**Solución:** La superficie  $S$  tiene ecuación  $G(x, y, z) = 0$  con  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ . La proyección  $D_{xy}$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 3$ . Entonces,

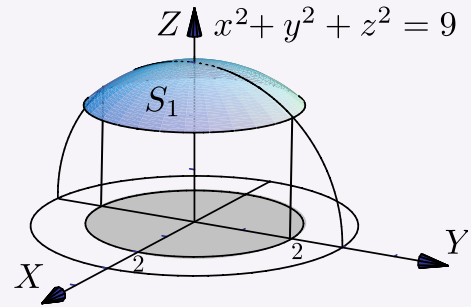
$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_{D_{xy}} (4xz, yz^3, z^2) \cdot \frac{\nabla G}{G_z} dx dy \\
&= \iint_{D_{xy}} (4xz, yz^3, z^2) \cdot \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right) dy dx \\
&= \iint_{D_{xy}} 4x^2 + y^2 z^2 + z^2 dy dx \\
&= \iint_{D_{xy}} 4x^2 + y^2(4-x^2-y^2) + 4-x^2-y^2 dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} (8+6r^2-r^4+r^4 \cos 2\theta) r dr d\theta \\
&= \frac{21\pi}{4}.
\end{aligned}$$



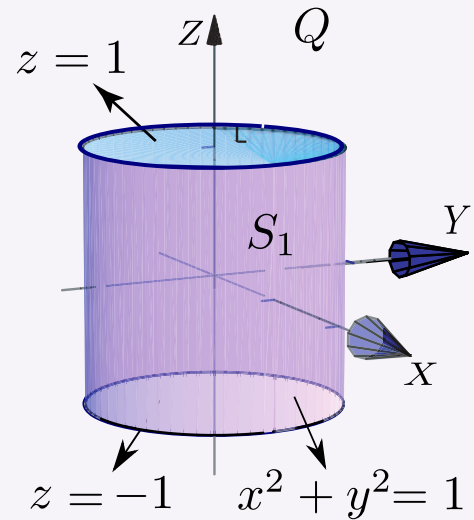
## 26

## Ejercicios

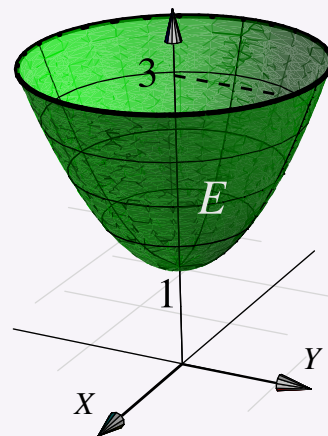
**6.11** Calcule  $I = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  donde  $\mathbf{F}$  es el campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = y \hat{\mathbf{i}} - x \hat{\mathbf{j}} + 8z \hat{\mathbf{k}}$  y  $S_1$  la parte de la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  que se encuentra dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , como se observa en la figura.



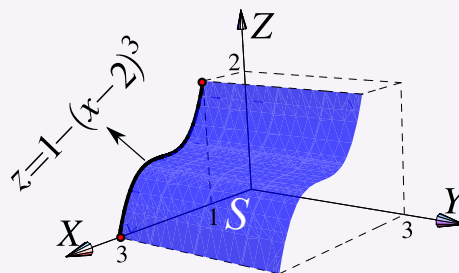
**6.12** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2 \hat{\mathbf{i}} + x^2y \hat{\mathbf{j}} + y \hat{\mathbf{k}}$ . Sea  $S_1$  es la superficie dada por  $S = S_a \cup S_b \cup S_c$  donde  $S_a, S_b, S_c$  son las tres superficies frontera del sólido  $Q$  limitado por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 1$  y  $z = -1$  como se ve en la figura. Calcule  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  donde  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario exterior a  $Q$ .



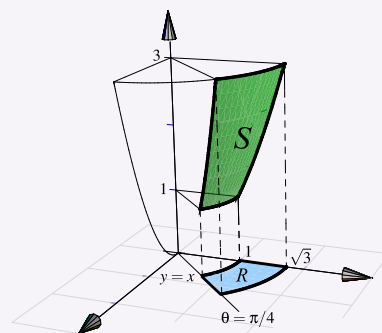
**6.13** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$  y  $E$  es la superficie de ecuación  $z = 1 + x^2 + y^2$ , con  $1 \leq z \leq 3$ , tal y como se muestra en la figura. Calcular  $\iint_E \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ .



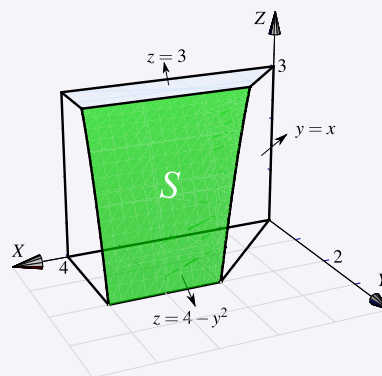
**6.14** Sea  $F(x, y, z) = (0, x + y, z)$ . Calcule la integral de superficie  $\iint_S F \cdot N dS$ , donde  $S$  es el trozo de cilindro de ecuación  $z = 1 - (x - 2)^3$  que está limitado por los planos  $y = 0$ ,  $y = 3$ ,  $z = 1$  y  $z = 2$  tal y como se muestra en la figura.



**6.15** Sea  $S$  la superficie de ecuación  $z = x^2 + y^2$  que se encuentra limitada por los planos  $z = 1$ ,  $z = 3$ ,  $y = x$  y el plano  $x = 0$ , tal y como se muestra en la figura. Calcule  $\iint_S F \cdot N dS$  si  $F(x, y, z) = (x, y, z^2)$



**6.16** Sea  $F(x, y, z) = (xy, x, z + 1)$  y sea  $S$  la porción de superficie de ecuación  $z = 4 - y^2$  limitada por las superficies  $z = 3$ ,  $x = 4$ ,  $z = 0$  y  $x = y$ , tal y como se muestra en la figura de la derecha. Calcular  $\iint_S F \cdot N dS$ .



## 6.6 Superficies orientables.

Sea  $S$  una superficie y  $\mathbf{r}(u, v)$  una parametrización de  $S_1$ . Los vectores normales a  $S$ , en  $(u, v)$ , puede escogerse entre los dos vectores unitarios opuestos

$$\mathbf{N}(u, v) = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}$$

**Caso**  $S: z = f(x, y)$ 

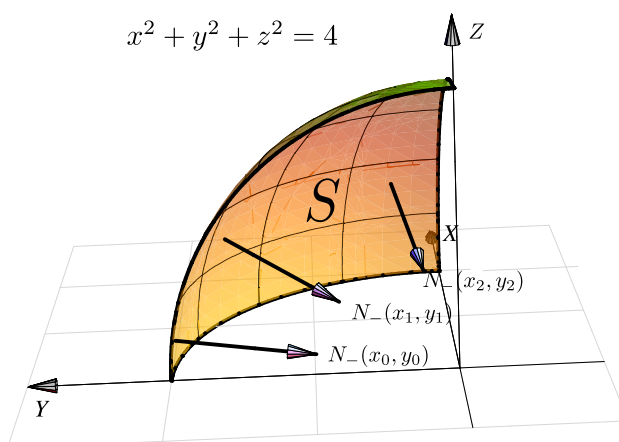
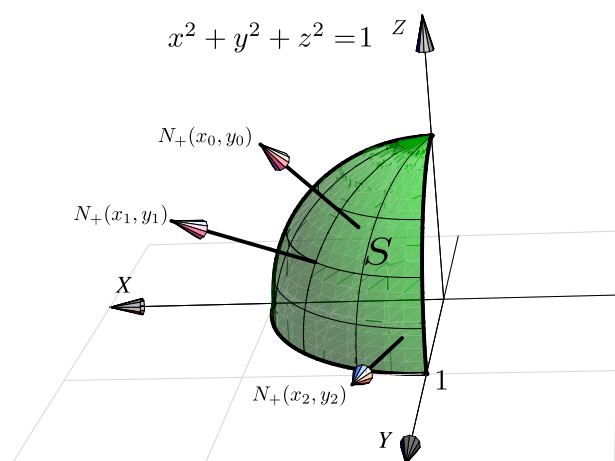
En el caso de que  $S: z = f(x, y)$ , si  $\mathbf{r}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + f(x, y) \hat{\mathbf{k}}$  y entonces

$$\mathbf{N}_+(x, y) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \text{ y } \mathbf{N}_-(x, y) = -\frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

Si la superficie tiene dos “caras”, el signo hace que cada vector normal esté en un lado u otro de la superficie. Este hecho se usa para “orientar” una superficie. Orientar una superficie significa escoger un signo para  $\mathbf{N}$ , una cara de la superficie es caracterizado  $\mathbf{N}$  y la otra cara por  $-\mathbf{N}$ . Como  $\mathbf{N}$  depende de la parametrización  $\mathbf{r}$ , es está la que al fin y al cabo orienta la superficie.

En el caso de una esfera, cada vector  $\mathbf{N}_+(x, y)$  (con signo positivo) apunta al *exterior* y el cada vector  $\mathbf{N}_-(x, y)$  apunta al interior

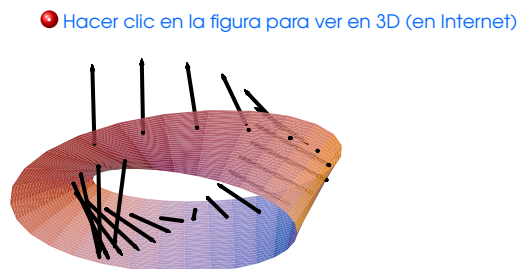
[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

**Definición 6.4**

Si en cada punto  $(x, y, z)$  de la superficie regular  $S_1$  es posible asociar un vector unitario  $\mathbf{N}(x, y, z)$  de tal manera que como función,  $\mathbf{N}$  sea continua sobre toda la superficie  $S$ , entonces se dice que  $S_1$  es *orientable*.

Como decíamos, la definición supone que la superficie tiene dos lados. Uno de los lados queda determinado por la función continua  $\mathbf{N}(x, y, z)$  sobre  $S_1$  y el otro lado por la normal de signo contrario.

Hay superficies de una sola cara, como la *banda de Möbius*, que no son orientables. En la figura que sigue tenemos una banda de Möbius. Note que la escogencia de  $\mathbf{N}$  no orienta la banda, es decir, si escogemos uno de los  $\mathbf{N}$ , la presencia de estos vectores  $\mathbf{N}$  “arriba” y “abajo” de la banda, muestran que hay una sola cara.



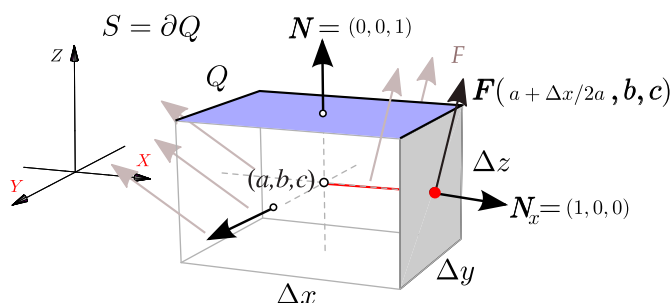
En las integrales de flujo que hemos calculado, hemos usado el vector normal unitario fundamental  $\mathbf{N}_+$ . No siempre este es el vector que se elige para los cálculos. Algunos teoremas requieren superficies orientadas con vectores normales unitarios hacia *el exterior*.

**Convenio para superficies cerradas.** En el caso de *superficies cerradas*, se conviene en que si  $\mathbf{N}$  apunta hacia afuera, esta es “la orientación positiva” y si  $\mathbf{N}$  apunta hacia adentro, esta es “la orientación negativa”.

## 6.7 Teorema de la Divergencia.

Ahora nos interesa analizar el flujo de un campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$  continuamente diferenciable, a través de la frontera  $S = \partial Q$  de un sólido simple  $Q$ , en la dirección del vector normal unitario *exterior* a  $\partial Q$ . El flujo total se puede separar entre el flujo que entra al sólido y el flujo que sale, en cada cara del sólido el flujo podría ser distinto.

En un caso sencillo, se toma un cubo  $Q$  centrado en  $(a, b, c)$  con aristas paralelas a los ejes. Calcular el flujo sobre  $S = \partial Q$  requiere calcular el flujo sobre cada una de las caras.



En la cara que contiene al punto  $(a + \Delta x/2, b, c)$  (punto rojo en la figura anterior) la estimación del flujo total  $\mathbf{F}t_{x+}$  sería

$$\mathbf{F}t_{x+} \approx \mathbf{F}(a + \Delta x/2, b, c) \cdot (1, 0, 0)\Delta y\Delta z = P(a + \Delta x/2, b, c)\Delta y\Delta z$$

En la cara (opuesta) que contiene al punto  $(a - \Delta x/2, b, c)$  la estimación del flujo total  $\mathbf{F}t_{x-}$  sería

$$\mathbf{F}t_{x-} \approx \mathbf{F}(a - \Delta x/2, b, c) \cdot (-1, 0, 0)\Delta y\Delta z = -P(a - \Delta x/2, b, c)\Delta y\Delta z$$

Luego el flujo total estimado en ambas caras sería,

$$F t_{x+} + F t_{x-} \approx [P(a + \Delta x/2, b, c) - P(a - \Delta x/2, b, c)] \Delta y \Delta z = \frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) \Delta x \Delta y \Delta z \text{ si } \Delta x \approx 0$$

De manera similar, si  $\Delta V$  es el volumen de la caja, el flujo total en las caras paralelas a los planos  $y = 0$  y  $z = 0$  sería aproximadamente  $\frac{\partial Q}{\partial y}(a, b, c) \Delta V$  y  $\frac{\partial R}{\partial z}(a, b, c) \Delta V$ , respectivamente.

Así, el flujo total a través de  $S = \partial Q$  con vector normal exterior, sería aproximadamente

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Big|_{(a,b,c)} \Delta V$$

Así, el flujo total que pasa a través de la frontera de una pequeña caja de centro  $(a, b, c)$  es un escalamiento del volumen, el factor de escalamiento  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ , evaluado en el centro, se llama *divergencia*.

#### Definición 6.5

La *divergencia* del campo vectorial  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  es el campo escalar

$$\mathbf{Div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Si  $\mathbf{F}$  es continuamente diferenciable,  $\mathbf{Div} \mathbf{F}$  es continuo y si  $Q_i$  es una caja de diámetro pequeño, entonces

$$\mathbf{Div} \mathbf{F} \Delta V \approx \iiint_{Q_i} \mathbf{Div} \mathbf{F} dV$$

Pero como  $\mathbf{Div} \mathbf{F} \Delta V$  es aproximadamente el flujo total a través de la frontera de  $Q_i$ , en la dirección del vector normal exterior, entonces

$$\iiint_{Q_i} \mathbf{Div} \mathbf{F} dV \approx \iint_{\partial Q_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dA$$

La generalización es llamada el *Teorema de la divergencia* o *Teorema de Gauss*.



**Teorema 6.1 (Teorema de la Divergencia).**

Sea  $Q$  un sólido limitado por una superficie orientable  $S_1$  y sea  $\mathbf{N}$  el vector normal unitario siempre exterior a  $Q$ . Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  sobre  $Q$  entonces

$$\iiint_Q \text{Div} \mathbf{F} dV = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

donde  $\text{Div} \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$  si  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ .

**Ejemplo 6.18**

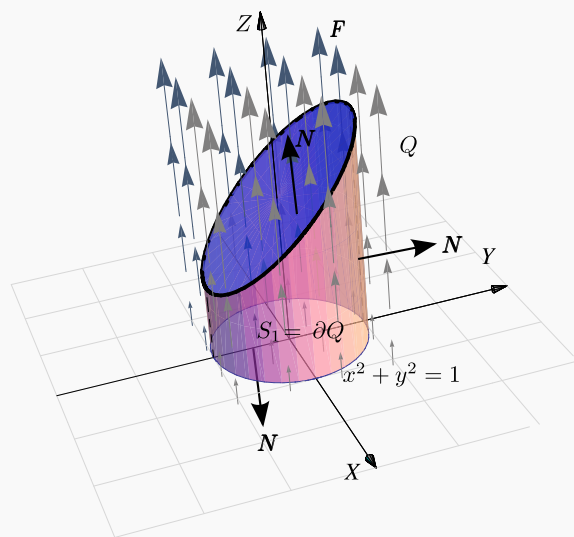
Calcular  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z+1) \hat{\mathbf{k}}$ ,  $S_1$  es la frontera del sólido  $Q$  limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , el plano  $z = 2 + y$  y  $z = 0$ , como se ve en la figura, y  $\mathbf{N}$  es el vector unitario siempre exterior a  $Q$ .

**Solución:** En vez de calcular la integral sobre cada una de las tres superficies que conforman la frontera de  $Q$  (ver los ejemplos 6.5, 6.5 y ??), usamos el teorema de la divergencia.

•  $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z+1)$ .

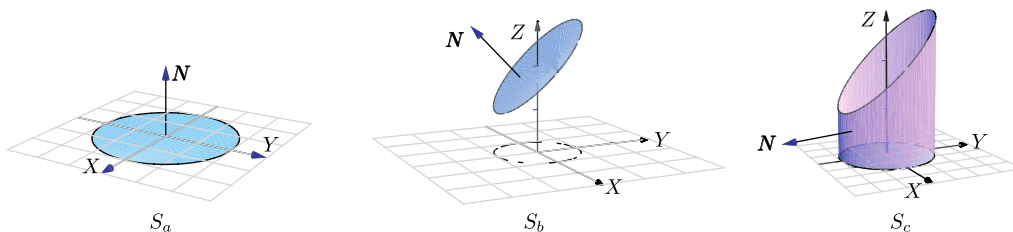
•  $\text{Div} \mathbf{F} = 0 + 0 + 1 = 1$ .

Proyectando sobre el plano  $XY$  y usando coordenadas cilíndricas, tenemos



$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iiint_Q \operatorname{Div} \mathbf{F} dz dy dx \\
&= \iiint_D \int_0^{2+y} 1 dz dy dx \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2+r \operatorname{sen} \theta} 1 r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2+r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} r^2 + \frac{r^3 \operatorname{sen}(\theta)}{3} \Big|_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 1 + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{3} d\theta = 2\pi
\end{aligned}$$

**La importancia de que  $\mathbf{N}$  se exterior a  $Q$ .** Consideremos los ejemplos 6.5, 6.5 y ???. El cálculo de la integral de flujo se hizo siempre con  $\mathbf{N} = (-f_x, -f_y, 1)$ . Pero este vector no siempre es exterior a  $Q$ . En el caso de la superficie  $S_a$  (figura siguiente), este vector *no es exterior*.



El resultado es  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \pi + 3\pi + 0 \neq \iiint_Q \operatorname{Div} \mathbf{F} dz dy dx = 2\pi$

**Ejemplo 6.19**

Calcular  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$  y  $S_1$  es la frontera del sólido  $Q$  comprendido entre las superficies  $z = 10 - x^2 - y^2$  y  $z = 2 + x^2 + y^2$ , y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario siempre exterior a  $Q$ .

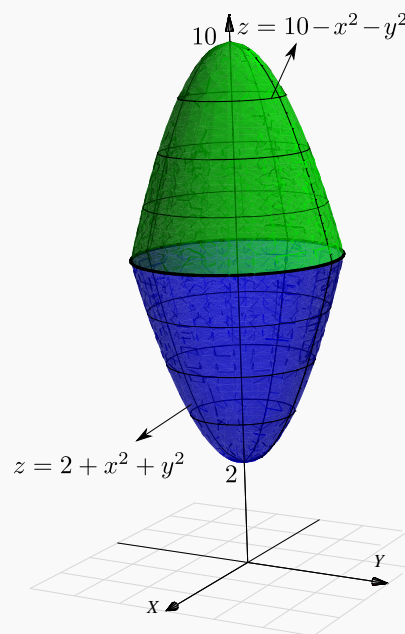
•  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  y  $\text{Div} \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$ . **Solución:** Podemos usar el teorema de la divergencia.

• La proyección del sólido sobre el plano  $xy$  es un círculo de radio 2 pues

$$z = 10 - x^2 - y^2 \cap z = 2 + x^2 + y^2 \implies 4 = x^2 + y^2.$$

Usando coordenadas cilíndricas obtenemos,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iiint_Q \text{Div} \mathbf{F} dz dy dx \\ &= \iiint_D \int_{2+x^2+y^2}^{10-x^2-y^2} 3 dz r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{2+r^2}^{10-r^2} 3r dz dr d\theta = 48\pi \end{aligned}$$

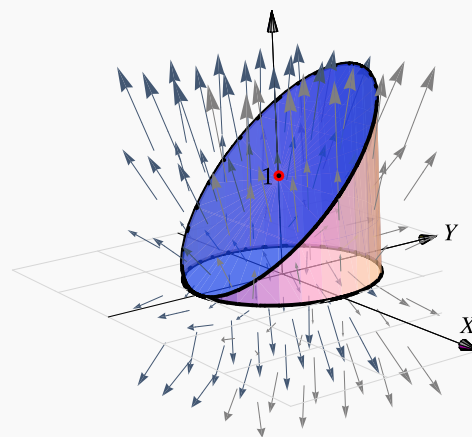
**Ejemplo 6.20**

Calcular  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = y \cos x \hat{i} + \frac{1}{2} y^2 \sin x \hat{j} + z \hat{k}$  y  $S_1$  es la frontera del sólido  $Q$  comprendido entre las superficies  $z = 1 + y$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  y  $z = 0$ , y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario siempre exterior a  $Q$ .

**Solución:** Podemos usar el teorema de la divergencia. La proyección del sólido sobre el plano  $XY$  es un círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

•  $\text{Div} \mathbf{F} = -y \sin x + y \sin x + 1 = 1$ .

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iiint_Q \operatorname{Div} \mathbf{F} dz dy dx \\
&= \iint_D \int_0^{1+y} 1 r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+r \sin \theta} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r \sin \theta) r dr d\theta = \pi
\end{aligned}$$

### Ejemplo 6.21

Sea  $Q$  el sólido limitado por las superficies  $S_a : z = \sin(xy)$ ,  $S_b : x = \frac{\pi}{2}$  y  $S_c : y = x$ .

Sea  $S_1$  la frontera del sólido  $Q$  y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario y exterior a  $Q$ .

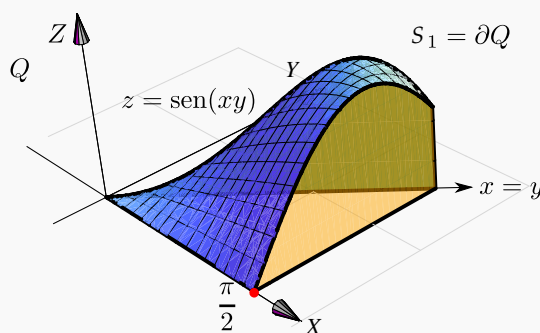
Calcule  $\iiint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{F} = \left( \frac{x^3}{3}, z, yx \right)$ .

**Solución:** Podemos usar el teorema de la divergencia. La proyección del sólido sobre el plano  $XY$  es el triángulo  $0 \leq x \leq \pi/2$  y  $0 \leq y \leq x$ .

•  $\operatorname{Div} \mathbf{F} = x^2$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iiint_Q \operatorname{Div} \mathbf{F} dz dy dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^x \int_0^{\sin(xy)} x^2 dz dy dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^x x^2 \sin(xy) dy dx \\
&= \int_0^{\pi/2} x - x \cos(x^2) dx = \frac{1}{8} \left( \pi^2 - 4 \sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \right)
\end{aligned}$$

• [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



# 27 Ejercicios

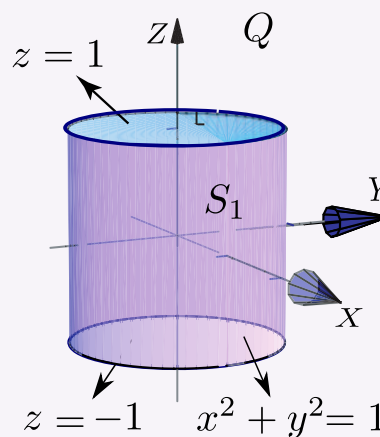
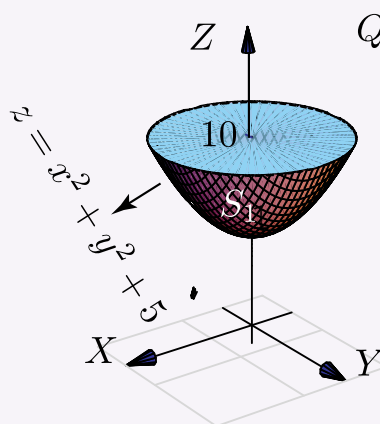
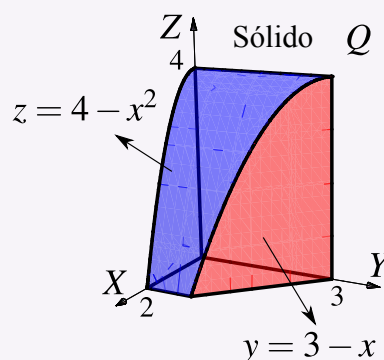
**6.17** Consideremos el campo de fuerzas  $\mathbf{F}$  con

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + \sin(y)) \hat{\mathbf{i}} + (\ln(xz) - y) \hat{\mathbf{j}} + (2z + \arctan(xy)) \hat{\mathbf{k}}$$

Calcule la integral de superficie  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  donde  $S$  es la frontera del sólido  $Q$ , el cual se muestra en la figura a la derecha y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario siempre exterior a  $Q$ .

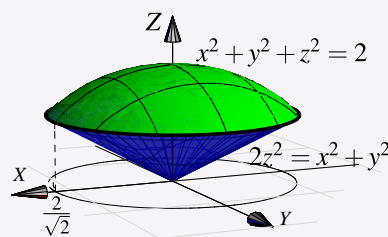
**6.18** Use el teorema de la divergencia para calcular  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  donde  $S_1$  es la frontera del sólido  $Q$ , limitado por la superficie  $z = x^2 + y^2 + 5$  y el plano  $z = 10$ , tal y como se muestra en la figura a la derecha,  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$  y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario exterior a  $Q$ .

**6.19** Calcule  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2 \hat{\mathbf{i}} + x^2y \hat{\mathbf{j}} + y \hat{\mathbf{k}}$ , y  $S_1$  es la superficie dada por  $S = S_a \cup S_b \cup S_c$  donde  $S_a, S_b, S_c$  son las tres superficies frontera del sólido  $Q$  limitado por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 1$  y  $z = -1$  como se ve en la figura, además  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario siempre exterior a  $Q$ .

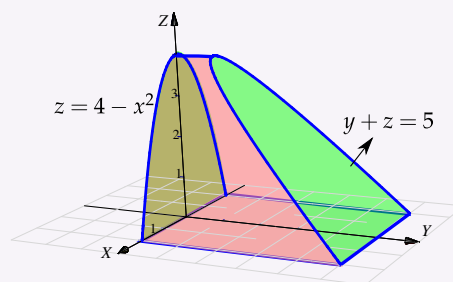


**6.20** Sea  $E$  la frontera del sólido  $Q$  limitado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  y el cono  $2z^2 = y^2 + x^2$ , tal y como se muestra en la figura.

Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + x \arctan(xz) \mathbf{j} + \frac{z^2}{2} \mathbf{k}$ , calcular  $\iint_E \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  si  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario siempre exterior a  $Q$ .

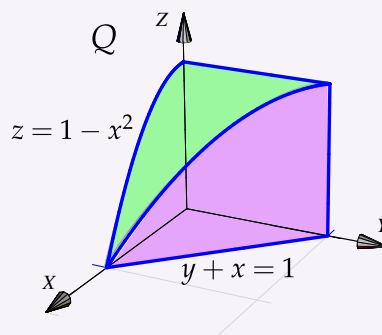


**6.21** Sea  $Q$  el sólido que se muestra en la figura a la derecha y sea  $S$  la frontera de  $Q$ , es decir,  $S = \partial Q$ . Calcule  $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  donde  $F(x, y, z) = (x^3 + \sin z, x^2 y + \cos z, \tan(x^2 + y^2))$  y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario siempre exterior a  $Q$ .



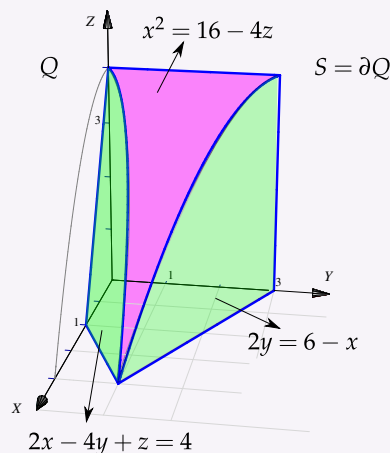
**6.22** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ ,  $S$  es la frontera del sólido  $Q$ , el cual se muestra a la derecha, y  $\mathbf{N}$  es un vector normal exterior a  $Q$ .

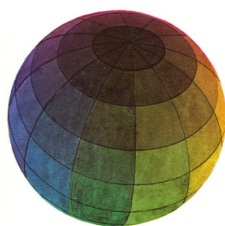
- calcule  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  sin usar el Teorema de la Divergencia.
- calcule  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  usando el teorema de la Divergencia.



**6.23** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 + 2)\mathbf{k}$ ,  $S$  es la frontera del sólido  $Q$ , el cual se muestra a la derecha, y  $\mathbf{N}$  es un vector normal exterior a  $Q$ .

- Calcule  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  sin usar el Teorema de la Divergencia.
- Calcule  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  usando el teorema de la Divergencia.





Versión actualizada de este libro:  
<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/>





Curvas y parametrizaciones.  
Campos escalares y campos vectoriales.  
Longitud de una curva.  
Integral de línea para campos escalares.  
(\*) Longitud de arco en coordenadas polares.  
Integral de línea de campos vectoriales.  
Trabajo.  
Campos conservativos. Independencia de la trayectoria.  
Teorema de Green (en el plano).  
Área como una integral de línea.  
Teorema de Stokes (Teorema de Green en el espacio).

## 7 — Integral de línea.

### 7.1 Curvas y parametrizaciones.

#### Definición 7.1

Consideremos la función vectorial continua  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ . La representación gráfica de  $\mathbf{r}$  se dice que es la *curva*  $C$  determinada por  $\mathbf{r}$  y que une los puntos  $A = \mathbf{r}(a)$  y  $B = \mathbf{r}(b)$ .

- Si  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ , la curva se dice *cerrada*.
- Si  $\mathbf{r}$  es inyectiva en  $[a, b]$ , la curva se dice *simple*. Si  $\mathbf{r}$  es cerrada y es inyectiva en  $]a, b]$ , la curva se dice *cerrada simple*. Las curvas cerradas simples se llaman curvas de Jordan.
- A  $\mathbf{r}$  le llamamos una *parametrización* de  $C$ .

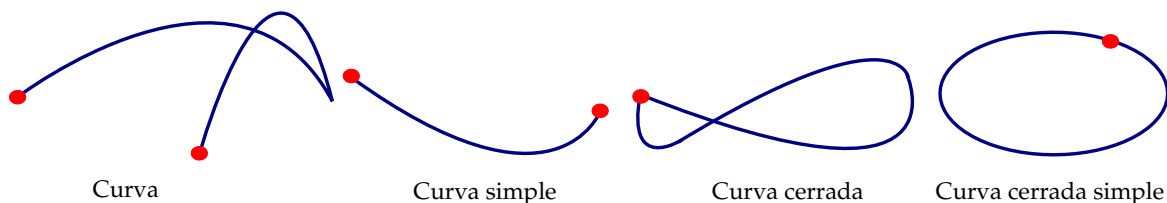
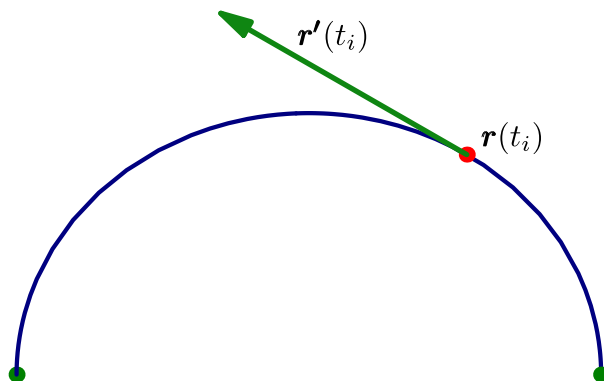


Figura 7.1: Curvas

La derivada de  $\mathbf{r}$  se define de la manera usual

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$$



### Ejemplo 7.1

Consideremos la curva  $C$  parametrizada por  $\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + (4-t)\hat{\mathbf{j}} + (4-(t-1)^2)\hat{\mathbf{k}}$  con  $t \in [0, 3]$ .

- $A = \mathbf{r}(0) = (0, 4-0, 4-(0-1)^2) = (0, 4, 3)$  y  $B = \mathbf{r}(3) = (3, 4-3, 4-(3-1)^2) = (3, 1, 0)$ .
- $\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + -2(t-1)\hat{\mathbf{k}}$ . En particular,  $\mathbf{r}'(1) = (1, -1, 0)$ . En la figura se representa la traslación de este vector velocidad al punto  $P = \mathbf{r}(1)$ .

 [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

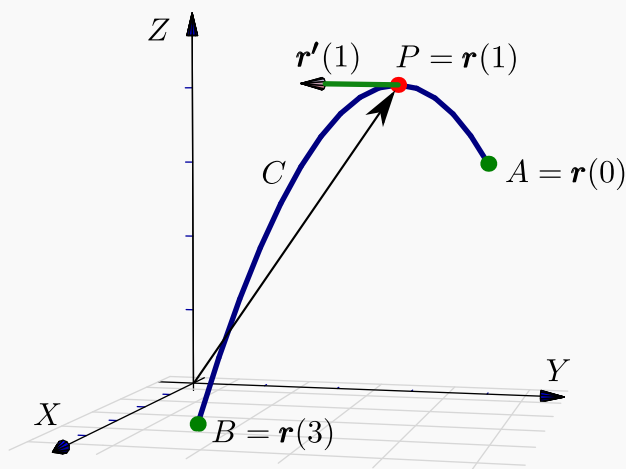


Figura 7.2: Curvas

**Curvas regulares.** Sea  $\mathbf{r}(t)$  una parametrización de una curva  $C$  en el plano o en el espacio. El parámetro  $t$  podría ser tiempo, ángulo, longitud de arco, coordenada  $x$ , etc. Decimos que la curva  $C$  es *regular* o *'suave'* en  $[a, b]$  si  $\mathbf{r}'(t)$  es continua en  $[a, b]$  y  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  para todo  $t \in [a, b]$  (es decir las componentes de  $\mathbf{r}$  no se anulan simultáneamente). También decimos que una curva  $C$  es *regular a trozos* en  $[a, b]$  si es regular en cada subintervalo de alguna partición finita de  $[a, b]$ .

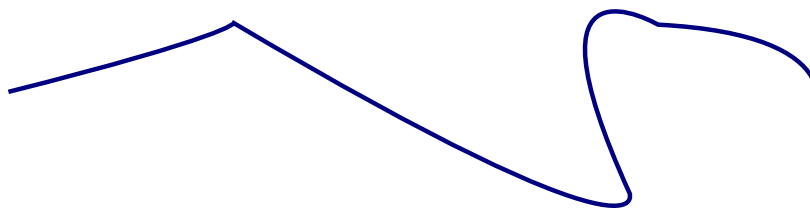
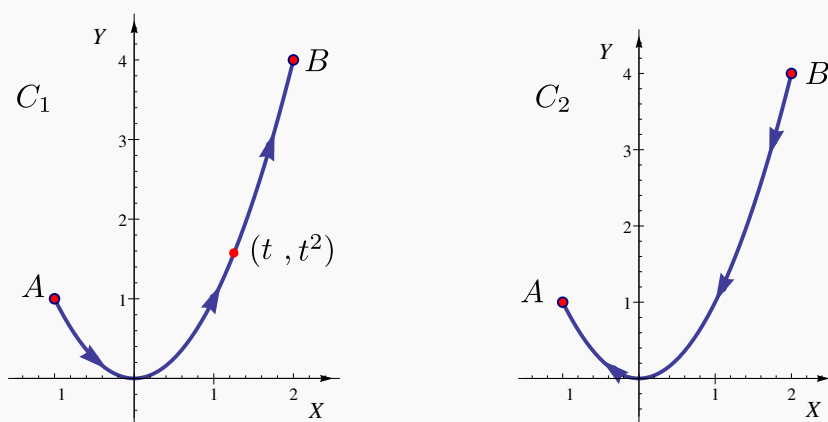


Figura 7.3: Curva regular a trozos

- En  $\mathbb{R}^2$  escribimos  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  o también  $\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}}$ , con  $t \in [a, b]$
- En  $\mathbb{R}^3$  escribimos  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  o también  $\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}} + z(t) \hat{\mathbf{k}}$ , con  $t \in [a, b]$
- Una función vectorial es de clase  $C^1$  si las derivadas de sus componentes son continuas.

**Ejemplo 7.2** (Curvas Orientadas).

Consideremos las curvas  $C_1$  y  $C_2$

Figura 7.4: Curvas  $C_1$  y  $C_2$ .

Ambas curvas tienen ecuación, en coordenadas rectangulares,  $y = x^2$  con  $x \in [-1, 2]$ . Pero  $C_1$  inicia en  $A = (-1, 1)$  y termina en  $B = (2, 4)$ ; mientras que  $C_2$  inicia en  $B$  y termina en  $A$ .

Para parametrizar cada curva debemos tomar en cuenta su *orientación*.

- Una parametrización de  $C_1$  es (tomando a  $x = t$  como parámetro),

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\underbrace{t}_{x(t)}, \underbrace{t^2}_{y(t)}) \text{ o también } \mathbf{r}(t) = \underbrace{t}_{x(t)} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{t^2}_{y(t)} \hat{\mathbf{j}} \text{ con } t \in [-1, 2].$$

Observe que

$$\mathbf{r}(-1) = (x(-1), y(-1)) = (-1, (-1)^2) = A$$

y

$$\mathbf{r}(2) = (2, 2^2) = B.$$

- Como  $C_2$  es  $C_1$  con la otra orientación, entonces podemos parametrizar  $C_2$  con  $r_1(t) = r(a+b-t)$ , de esta manera  $r_1(t) = r(-1+2-t) = r(1-t)$

$$\mathbf{r}_1(t) = (x(1-t), y(1-t)) = (1-t, (1-t)^2) \text{ o también } \mathbf{r}_1(t) = \underbrace{(1-t)}_{x(t)} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{(1-t)^2}_{y(t)} \hat{\mathbf{j}} \text{ con } t \in [-1, 2].$$

Observe que

$$\mathbf{r}_1(-1) = B$$

y

$$\mathbf{r}_1(2) = A.$$

### (Cambio de orientación).

si  $r(t)$  es una parametrización con  $t \in [a, b]$ , entonces una parametrización que invierte la orientación es  $r_1(t) = r(a+b-t)$  con  $t \in [a, b]$

### (Parametrizar una elipse contra-reloj).

Una elipse de ecuación  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  se puede parametrizar con

$$\mathbf{r}(t) = (h + a \cos t) \hat{\mathbf{i}} + (k + b \sin t) \hat{\mathbf{j}} \text{ con } t \in [0, 2\pi[.$$

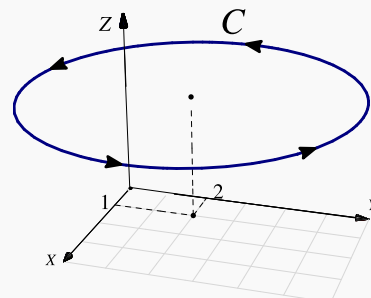
En este caso no se toma en cuenta la orientación de la curva aunque esta parametrización corresponde a una orientación contra-reloj.

**Ejemplo 7.3**

Sea  $C$  la curva de ecuación  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ ;  $z = 3$ . Se trata de una circunferencia, es decir, un caso particular de elipse. Una parametrización es

$$r(t) = (1 + 4\cos(t)) \hat{i} + (2 + 4\sin(t)) \hat{j} + 3 \hat{k}, \quad t \in [0, 2\pi[$$

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 7.5:** Curva  $C$ .

**Segmentos de recta.** Sean  $A, B \in \mathbb{R}^3$ . El segmento de recta que va de  $A$  hasta  $B$  se puede parametrizar con

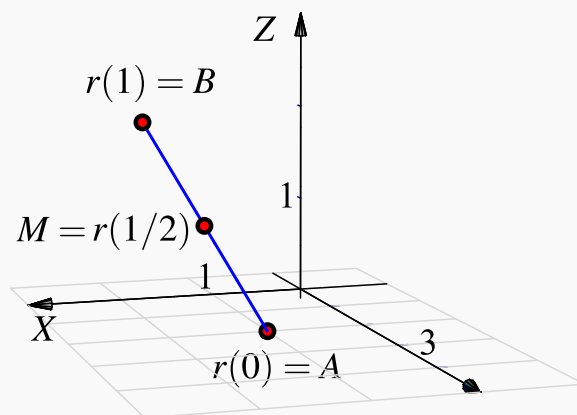
$$r(t) = A + t(B - A) \quad \text{con } t \in [0, 1].$$

El punto inicial es  $r(0) = A + 0 \cdot (B - A) = A$ ; el punto final es  $r(1) = A + 1 \cdot (B - A) = B$  y el punto medio es  $r(1/2) = A + \frac{1}{2} \cdot (B - A) = \frac{A+B}{2}$ .

**Ejemplo 7.4**

El segmento  $C_1$  que va de  $A = (1, 2, 0)$  hasta  $B = (2, 1, 2)$  se puede parametrizar con

$$\begin{aligned} r(t) &= A + t(B - A) \\ &= (1 + t, 2 - t, 2t) \quad \text{con } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$



**Ejemplo 7.5**

Considere la curva  $C = C_1 + C_2 + C_3$ . Parametrizar  $C$ .

**Solución:**

- $C_1$  es un segmento de recta sobre el eje  $Y$  por tanto  $x(t) = 0$  y  $z(t) = 0$ . Una parametrización es

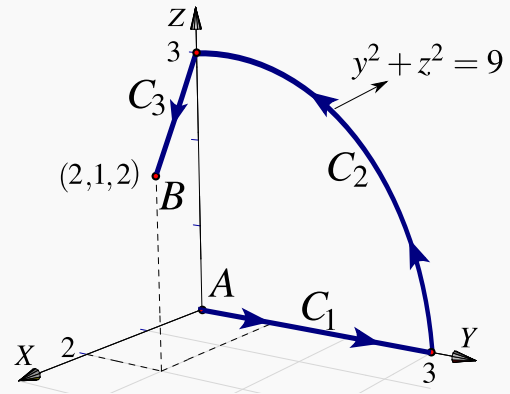
$$r_1(t) = (0, t, 0) \text{ con } t \in [0, 3].$$

- $C_2$  es un cuarto de circunferencia de radio 3, en el plano  $YZ$ . Lo podemos parametrizar con

$$r_2(t) = (0, 3 \cos t, 3 \sin t) \text{ con } t \in [0, \pi/2].$$

- $C_3$  es un segmento de recta que va de  $(2, 1, 2)$  hasta  $(0, 0, 3)$ . Podemos parametrizar con

$$\begin{aligned} r_3(t) &= (2, 1, 2) + t[(0, 0, 3) - (2, 1, 2)] \\ &= (2 - 2t, 1 - t, 2 + 2t) \text{ con } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.6**

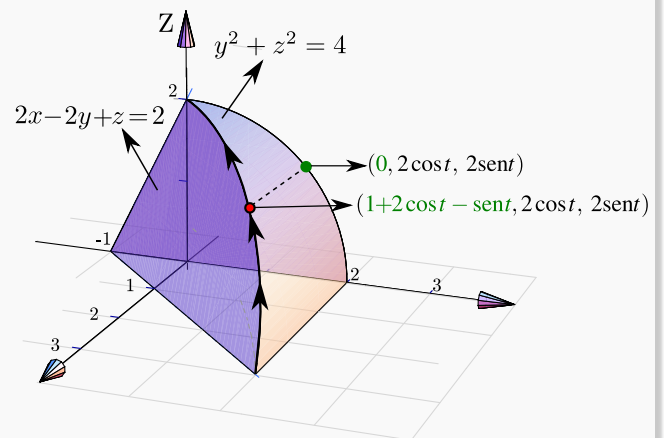
Considere la curva  $C$  de intersección entre el plano  $2x - 2y + z = 2$  y el cilindro  $y^2 + z^2 = 4$ . Determine una parametrización para  $C$ .

**Solución:** Los puntos de  $C$  son puntos  $(x(t), y(t), z(t))$  en donde  $y(t)$  y  $z(t)$  están en la circunferencia  $y^2 + z^2 = 4$ , es decir, podemos poner  $y(t) = 2 \cos t$  y  $z(t) = 2 \sin t$ .

Como  $x(t)$  está en el plano  $2x - 2y + z = 2$ , despejando:  $x(t) = 1 - z(t)/2 + y(t)$ , ahora podemos escribir

$$C: r(t) = (1 + 2 \cos t - \sin t, 2 \cos t, 2 \sin t) \text{ con } t \in [0, \pi/2]$$

Observe que  $r(0) = (3, 2, 0)$  y  $r(\pi/2) = (0, 0, 2)$ .



**Ejemplo 7.7**

Considere la curva  $C$  de intersección entre el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $z = 2 - x$ . Parametrizar  $C$ .

**Solución:** Hay varias maneras de parametrizar  $C$ . Veamos dos maneras.

- **Primera manera:** Los puntos de  $C$  son puntos  $(x(t), y(t), z(t))$  con  $x(t)$  y  $y(t)$  sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ , por lo tanto podemos poner  $x(t) = \cos t$  y  $y(t) = \sin t$ . Como  $z(t)$  está en el plano  $z = 2 - x$ , entonces  $z(t) = 2 - x(t)$ . Una parametrización podría ser

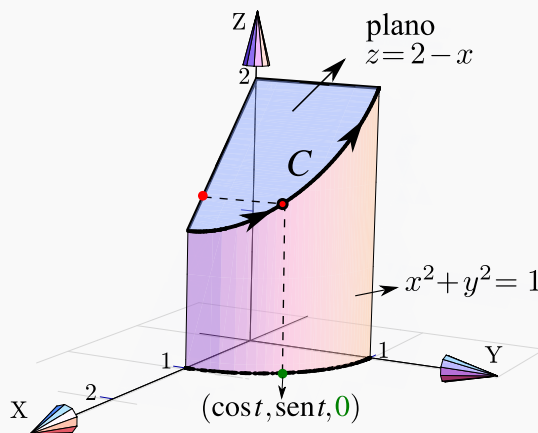
$$C: r(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \cos t) \text{ con } t \in [0, \pi/2]$$

Observe que  $r(0) = (1, 0, 1)$  y que  $r(\pi/2) = (0, 1, 2)$ .

- **Segunda manera:** Ver los puntos de  $C$  con  $x(t)$  y  $z(t)$  sobre la recta  $z = 2 - x$  y  $y(t)$  en el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Una parametrización se podría obtener tomando a  $x = t$  como parámetro:

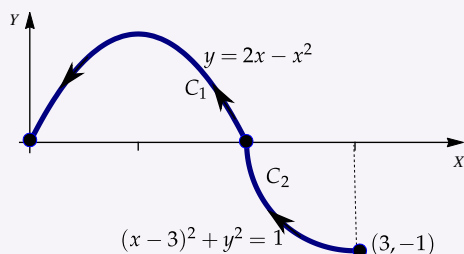
$$-C: r(t) = (t, \sqrt{1-t^2}, 2-t) \text{ con } t \in [0, 1]$$

La parametrización invierte la orientación, eso lo indicamos con " $-C$ ".

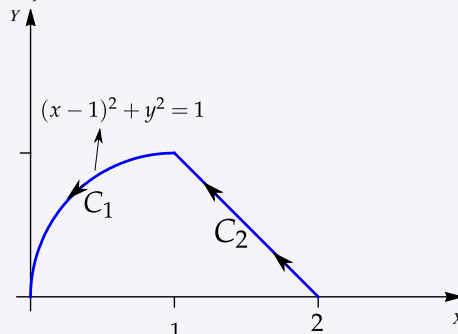
**28****Ejercicios**

**7.1** Determine una parametrización para cada una de las siguientes curvas.

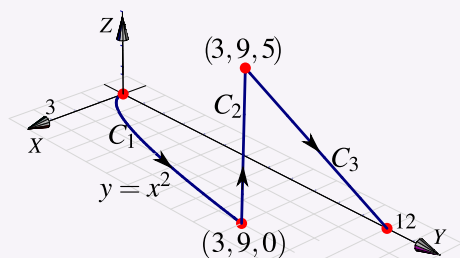
a.)



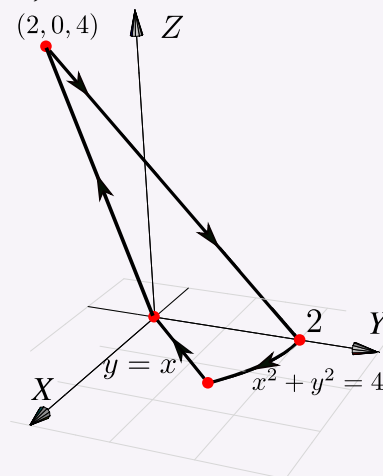
b.)



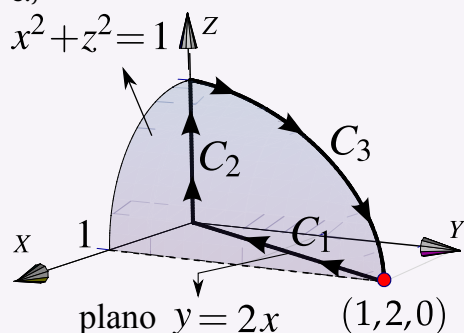
c.)



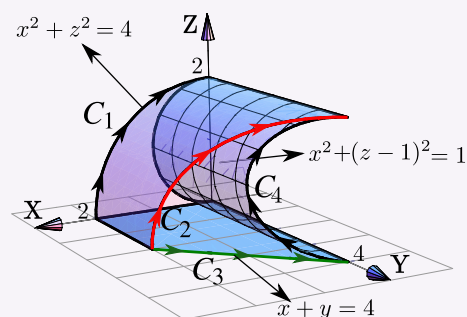
d.)



e.)



f.)



## 7.2 Campos escalares y campos vectoriales.

### Definición 7.2

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Una aplicación  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina *campo escalar* o función escalar. Una función  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se denomina *campo vectorial*.

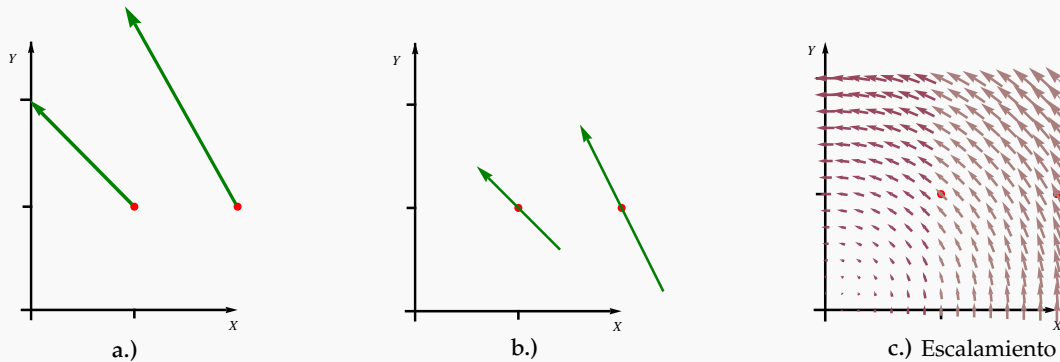
### Ejemplo 7.8 (Representación gráfica).

Una manera de visualizar el campo gráficamente es anclar en cada punto  $(x, y)$  el respectivo vector  $\mathbf{F}(x, y)$  (se traslada desde el origen). Pero también se puede anclar el vector de tal manera que el punto quede en el medio del vector (como si el vector fuera parte de una recta tangente). En general, la representación gráfica se hace anclando el vector de esta segunda manera y escalando el tamaño de los vectores de tal manera que unos no se sobrepongan sobre los otros, para tener una mejor visualización de la dirección de “flujo” del campo vectorial.



Así lo hace el software (como **Wolfram Mathematica**).

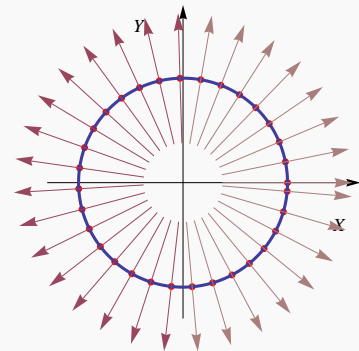
Por ejemplo, Consideremos el campo  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ . En la figura **a.)** se dibujan dos vectores anclados en el punto, en la figura **b.)** se dibujan dos vectores anclados con el punto en el medio y en la figura **c.)** se hace la representación gráfica del campo escalando los vectores, tal y como se acostumbra.



**Figura 7.6:**  $\mathbf{F}(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))$

### Ejemplo 7.9

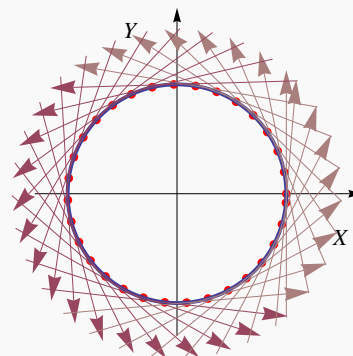
- Representación gráfica del campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = (2x, 2y)$  sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ . Observe que si  $z = x^2 + y^2$  entonces  $\mathbf{F}(x, y) = \nabla z$ , por eso los vectores son perpendiculares a esta circunferencia (la curva de nivel  $z = 1$ ).



**Figura 7.7:**  $\mathbf{F}$  sobre  $x^2 + y^2 = 1$ .

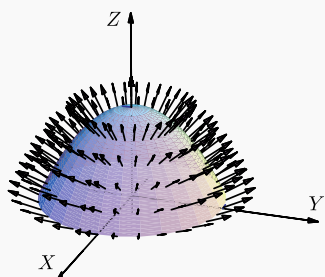
**Ejemplo 7.10**

- Representación gráfica, sobre la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ , del campo vectorial  $F(x, y) = (-y, x)$ .

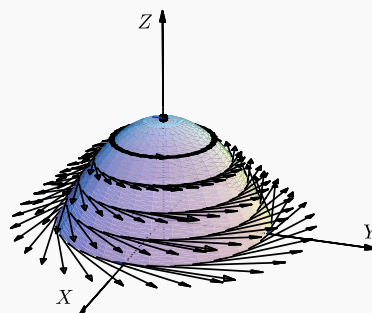


**Figura 7.8:**  $F$  sobre  $x^2 + y^2 = 1$ .

- Sea  $S_1$  la superficie de ecuación  $z = -x^2 - y^2 + 1$ . En la figura de abajo se presenta parte de la representación gráfica, sobre  $S$ , de los campos vectoriales



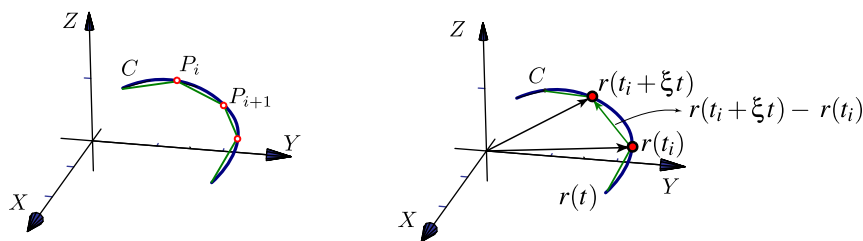
**Figura 7.9:**  $F_1(x, y, z) = \frac{(2x, 2y, 1)}{3\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$



**Figura 7.10:**  $F_2(x, y, z) = (-y\sqrt{1-z}, x\sqrt{1-z}, 0)$

### 7.3 Longitud de una curva.

Consideremos una curva  $C$  regular y simple, parametrizada por  $\mathbf{r}$  en  $[a, b]$ . Para calcular la longitud de  $C$ , la idea es partir el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes  $[a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, b]$  y considerar una línea poligonal inscrita en  $C$ , como se muestra en la figura.



**Figura 7.11:** Longitud de arco como una integral de Riemann.

La longitud de la curva (“rectificable”) se define como el límite al cual tiende la suma de las longitudes de los segmentos de la línea poligonal cuando  $\|P\| = \text{Máx}(t_{i-1} - t_i) \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ , es decir

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|r(t_i) - r(t_{i-1})\|$$

Si  $C$  es regular, por el teorema del valor medio podemos poner  $\|r(t_i) - r(t_{i-1})\| = \|r'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\|$  con  $\xi_i \in ]t_i, t_{i-1}[$  y concluir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|r'(\xi_i) \Delta t\| = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

### Definición 7.3 (Longitud de una curva).

Sea  $C$  regular, simple y parametrizada por  $r(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , entonces la longitud (de arco) de  $C$  es

$$s = \int_C \|r'(t)\| dt$$

Además, la longitud de arco *no depende* de la parametrización de  $C$  (ni, por tanto, de la orientación).

Sea  $C$  parametrizada por  $r(t)$  con  $t \in [a, b]$ .

### Caso $C: r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

Si  $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  con  $t \in [a, b]$  entonces

$$s = \int_C \|r'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

**Caso**  $C: y = f(x)$ 

Si  $y = f(x)$  entonces tomando  $x = t$  tenemos

$$s = \int_C ||\mathbf{r}'(t)|| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Caso**  $C: \mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}} + z(t) \hat{\mathbf{k}}$ 

Si  $\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}} + z(t) \hat{\mathbf{k}}$  con  $t \in [a, b]$  entonces

$$s = \int_C ||\mathbf{r}'(t)|| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

**Ejemplo 7.11**

Calcular la longitud de la circunferencia de un círculo de radio  $a$ .

**Solución:** La circunferencia  $C$  se puede parametrizar con

$$C: \mathbf{r}(t) = \underbrace{a \cos(t)}_{x(t)} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{a \sin(t)}_{y(t)} \hat{\mathbf{j}} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi[.$$

$$\mathbf{r}'(t) = \underbrace{-a \sin(t)}_{x'(t)} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{a \cos(t)}_{y'(t)} \hat{\mathbf{j}}$$

$$s = \int_C ||\mathbf{r}'(t)|| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2a\pi$$

**Ejemplo 7.12**

Calcular la longitud de la hélice  $x(t) = 2 \cos(t)$ ,  $y(t) = 2 \sin(t)$ ,  $z(t) = t/4$  con  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Solución:**

$$\mathbf{r}(t) = \underbrace{2 \cos(t)}_{x(t)} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{2 \sin(t)}_{y(t)} \hat{\mathbf{j}} + \underbrace{t/4}_{z(t)} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

$$\mathbf{r}'(t) = \underbrace{-2 \sin(t)}_{x'(t)} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{2 \cos(t)}_{y'(t)} \hat{\mathbf{j}} + \underbrace{1/4}_{z'(t)} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned}\int_C \|r'(t)\| dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + \frac{1}{16}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{65}{16}} dt = 2\pi \sqrt{\frac{65}{16}}.\end{aligned}$$

## 29

## Ejercicios

**7.2** Calcular la longitud de la curva  $C: y = \sqrt{x^3}$ ,  $x \in [0, 44]$

**7.3** Calcular la longitud de la curva  $C: x = \frac{2}{3}(y-1)^{3/2}$ ,  $y \in [1, 4]$ .

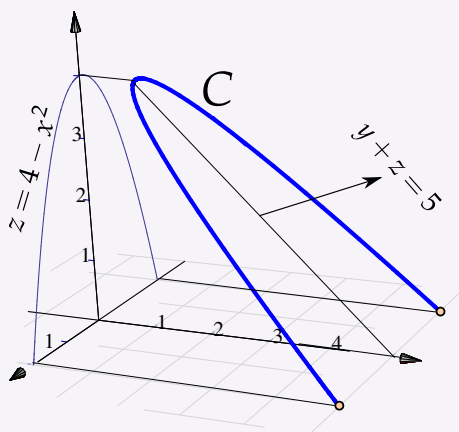
**7.4** Calcular la longitud de la curva  $C: y^2 = (2x-1)^3$ ,  $x \in [1/2, 4]$  (Ayuda: La curva tiene dos ramas).

**7.5** Calcular la longitud de la curva  $C: y = \log(\sec x)$ ,  $x \in [0, \pi/4]$

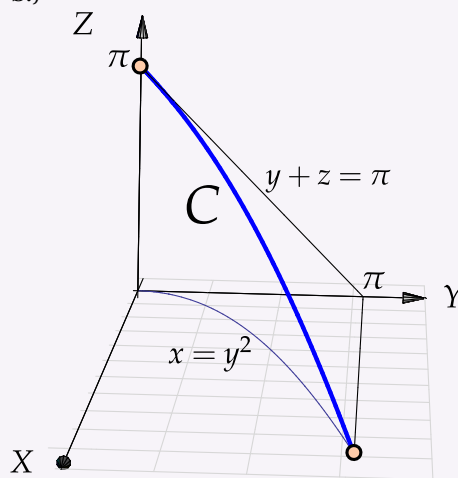
**7.6** Calcular la longitud de la curva  $C: y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ ,  $x \in [1, 2]$

**7.7 Plantear** la o las integrales que dan la longitud de las siguientes curvas,

a.)



b.)



## 7.4 Integral de línea para campos escalares.

**Masa de un alambre.** Consideremos un trozo de alambre delgado cuya masa varía continuamente y tiene valor  $\rho(\mathbf{x})$  gramos por centímetro en el punto  $\mathbf{x}$  sobre  $C$ .

Para estimar la masa total sobre  $C$ , hacemos una partición de  $C: \{\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), \dots, \mathbf{r}(t_{k+1})\}$  donde  $\mathbf{r}$  es una parametrización de  $C$ .

Si  $\Delta s_i = \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\|$  centímetros, la masa del segmento que va de  $\mathbf{r}(t_{i+1})$  a  $\mathbf{r}(t_i)$  es aproximadamente  $\rho(\mathbf{r}(t_i))\Delta s_i$  gramos y la masa total  $s$  del alambre sería

$$s \approx \sum_{i=1}^k \rho(\mathbf{r}(t_i))\Delta s_i$$

Esta es una suma de Riemman y por tanto podemos tomar el límite (si existe):  $s = \int_C \rho(\mathbf{x}) ds$

Generalizando, tenemos la siguiente definición,

#### Definición 7.4

Sea  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $C$  una curva suave y simple, contenida en  $U$  y parametrizada por  $\mathbf{r}(t)$  con  $t \in [a, b]$ , entonces la integral de línea de  $f$  sobre  $C$  es

$$\int_C f d\mathbf{s} = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

#### Ejemplo 7.13

Sea  $C$  el arco de parábola  $x = y^2$  con  $y \in [0, \sqrt{2}]$ . Calcular  $\int_C 2x - 2y^2 + 8y d\mathbf{s}$

**Solución:** Usemos  $y = t$  como parámetro,

$$C: \mathbf{r}(t) = \underbrace{t^2}_{x(t)} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{t}_{y(t)} \hat{\mathbf{j}} \quad \text{con } t \in [0, \sqrt{2}].$$

$$\mathbf{r}'(t) = \underbrace{2t}_{x'(t)} \hat{\mathbf{i}} + \underbrace{1}_{y'(t)} \hat{\mathbf{j}}$$

Entonces  $d\mathbf{s} = \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \sqrt{(2t)^2 + 1^2} dt$

$$\begin{aligned}
 \int_C 2x - 2y^2 + 8y \, ds &= \int_0^{\sqrt{2}} (2t^2 - 2t^2 + 8t) \sqrt{(2t)^2 + 1^2} \, dt \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} 8t \sqrt{4t^2 + 1} \, dt \\
 &= \left. \frac{2}{3} (4t^2 + 1)^{3/2} \right|_0^{\sqrt{2}} = 52/3
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.14**

Calcular  $\int_C (x^2 + y^2)^5 \, ds$  con  $C$  la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Solución:** Una parametrización de la circunferencia es

$$C: \mathbf{r}(t) = 2 \cos t \, \hat{\mathbf{i}} + 2 \sin t \, \hat{\mathbf{j}}, \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

Como  $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt = \|4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t\| \, dt = 2 \, dt$  entonces

$$\int_C (x^2 + y^2)^5 \, ds = \int_0^{2\pi} 4^5 \cdot 2 \, dt = 2 \cdot 4^5 \cdot 2\pi.$$

**Ejemplo 7.15**

Calcular  $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, ds$  con  $C$  la espira (una vuelta) de la hélice  $x(t) = 2 \cos(t)$ ,  $y(t) = 2 \sin(t)$ ,  $z(t) = 2t$ .

**Solución:** Como  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 4\| = \sqrt{8}$ , entonces

$$\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{4t^2}{4} \sqrt{8} \, dt = \frac{16\sqrt{2}}{3} \pi^3.$$

**30****Ejercicios**

**7.8** Calcular  $\int_C xy^2 \, ds$  donde  $C$  es la mitad superior de la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 = 16$

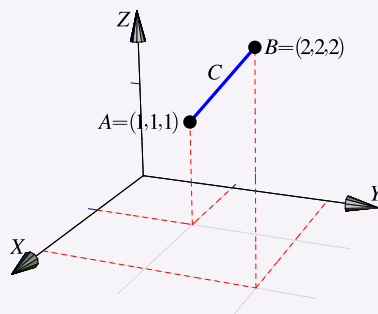
**7.9** Calcular  $\int_C x \, ds$  donde  $C$  es el arco de parábola  $C: y = x^2$  con  $x \in [-1, 1]$ .

**7.10** Calcular  $\int_C \frac{xy+z}{2x-y} ds$  donde  $C$  es el segmento de recta que va de  $(0,0,0)$  a  $(1,1,0)$ .

**7.11** Calcule la integral de línea

$$\int_C \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} ds$$

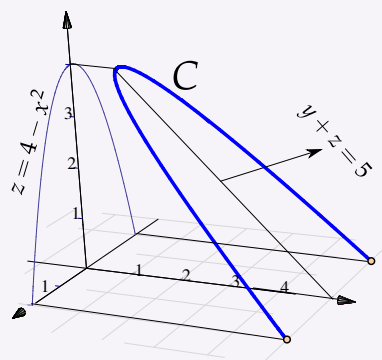
donde  $C$  es el segmento de recta que va desde  $A = (1, 1, 1)$  hasta el punto  $B = (2, 2, 2)$ , tal y como se muestra en la figura a la derecha



**7.12** Calcule la integral de línea

$$\int_C \frac{x^2+2y}{\sqrt{33-8z}} ds$$

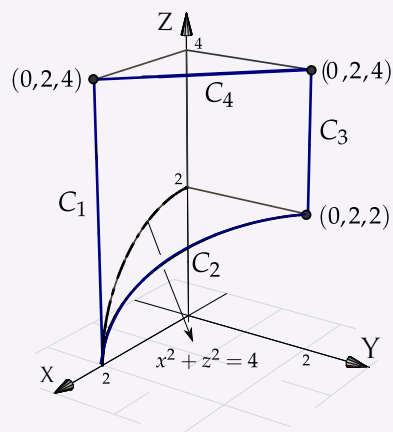
donde  $C$  es la curva que se muestra en la figura a la derecha



**7.13** Calcule la integral de línea

$$\int_C x+y+z-2 ds$$

donde  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  es la curva que se muestra en la figura a la derecha





## 7.5 (\*) Longitud de arco en coordenadas polares.

Ahora el parámetro será  $\theta$ . Si  $C$  esta dada por  $r = r(\theta)$  con  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , entonces

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta) \\ y' = r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

Luego, desarrollando y simplificando:  $\|(x', y')\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{[r'(\theta)]^2 + r^2(\theta)}$ . Así,

## Longitud de arco en coordenadas polares

$$\int_C f \, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta) \cos(\theta), r(\theta) \sin(\theta)) \sqrt{[r'(\theta)]^2 + r^2(\theta)} \, d\theta$$

## Ejemplo 7.16

Calcular  $\int_C x \sqrt{x^2 - y^2} \, ds$  con  $C$  la curva de ecuación  $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ ,  $x \geq 0$ .

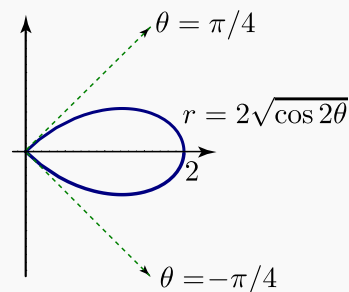


Figura 7.12: Curva  $C$

**Solución:** Cambiando a polares la curva queda con ecuación  $r = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$  donde  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . Además

$$(x')^2 + (y')^2 = [r'(\theta)]^2 + r^2(\theta) = \left(-\frac{2 \sin(2\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2 + \left(2\sqrt{\cos(2\theta)}\right)^2 = \frac{4}{\cos 2\theta}$$

$$\begin{aligned}
\int_C x \sqrt{x^2 - y^2} ds &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r \cos \theta \sqrt{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{4}{\cos(2\theta)}} d\theta \\
&= 8 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta \cos \theta d\theta \quad (\text{sustituyendo } r \text{ y simplificando}). \\
&= 8 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \quad (\text{sustituyendo } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
&= \left. \sin \theta - 2 \frac{\sin^3 \theta}{3} \right|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

## 7.6 Integral de línea de campos vectoriales. Trabajo.

**Trabajo.** Si una fuerza (empuje) *constante*  $\mathbf{F}$  desplaza una partícula a lo largo de un vector  $\Delta \mathbf{r}$ , el trabajo realizado por esta fuerza se define como el producto de la medida del desplazamiento por la componente  $F_e$  de la fuerza en la dirección de dicho desplazamiento (fuerza efectiva), es decir, el trabajo es

$$W = \|F_e\| \|\Delta \mathbf{r}\|$$

Si  $\theta$  es la medida del ángulo formado por  $\mathbf{F}$  y  $\Delta \mathbf{r}$  entonces el escalar  $\|F_e\| = \|\mathbf{F}\| \cos \theta$  es la componente de la fuerza en la dirección del movimiento<sup>1</sup> (0 si  $\theta = \pi/2$  y  $\|\mathbf{F}\|$  si  $\theta = 0$ ) y  $\|\Delta \mathbf{r}\|$  la medida del desplazamiento. Luego el trabajo realizado es

$$W = \|\mathbf{F}\| \|\Delta \mathbf{r}\| \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

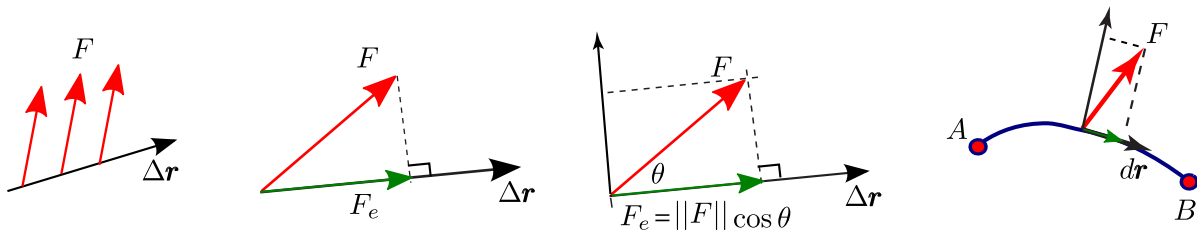


Figura 7.13: Trabajo.

Para calcular el trabajo sobre una curva  $C$ , se consideran pedazos muy pequeños de la curva, tan pequeños que son, aproximadamente, segmentos de recta y la fuerza es casi constante sobre estos pedazos de tamaño  $\|d\mathbf{r}\|$ . El trabajo hecho por  $\mathbf{F}$  para mover la partícula desde el inicio hasta el final de  $d\mathbf{r}$  es  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Sumando todos los trabajos (pasando a la integral) obtenemos

<sup>1</sup>  $\mathbf{F}$  se descompone como la suma de su componente ortogonal y su proyección ortogonal sobre  $\Delta \mathbf{r}$ . Solamente la proyección ortogonal es la parte de  $\mathbf{F}$  responsable del trabajo que se efectúa.

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

**Definición 7.5 (Trabajo).**

Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo sobre la curva  $C$ . Suponemos que  $C$  está orientada, es regular y simple. Entonces

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\|M\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i,$$

si el límite existe cuando es tomado sobre todas las particiones ordenadas  $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), \dots, \mathbf{r}(t_{k+1})$  de  $C$  con  $\|M\| = \max_i \{\|\Delta \mathbf{r}_i\|\}$  y  $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$

En la definición anterior,  $C$  puede ser regular, cerrada y simple. En particular si  $C$  es la unión de curvas regulares y simples  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , escribimos  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_m$  y definimos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

- El vector unitario tangente es  $T = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$  y  $d\mathbf{r} = (dx_1(t), dx_2(t), \dots, dx_n(t)) = (x'_1(t)dt, x'_2(t)dt, \dots, x'_n(t)dt)$ . Si  $C$  está parametrizada por  $\mathbf{r}(s)$  (usando la longitud de arco  $s$  como parámetro) con  $0 \leq s \leq \ell$ , entonces como  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\|dt = T ds$ , tenemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\ell (\mathbf{F} \cdot T) ds$$

La función escalar  $\mathbf{F} \cdot T$  puede tener discontinuidades de primera especie ligadas a algún punto esquina de  $C$ .

- Si  $C$  está parametrizada por  $\mathbf{r}(t)$  con  $t \in [a, b]$ , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt$$

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \hat{\mathbf{i}} + Q(x, y) \hat{\mathbf{j}}$$

Sea  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) \hat{\mathbf{i}} + Q(x, y) \hat{\mathbf{j}}$ , como  $dx = x'(t)dt$  y  $dy = y'(t)dt$ , podemos escribir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b P dx + Q dy$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b P dx + Q dy \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \hat{\mathbf{i}} + Q(x, y, z) \hat{\mathbf{j}} + R(x, y, z) \hat{\mathbf{k}}$$

Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \hat{\mathbf{i}} + Q(x, y, z) \hat{\mathbf{j}} + R(x, y, z) \hat{\mathbf{k}}$ , como  $dx = x'(t)dt$ ,  $dy = y'(t)dt$  y  $dz = z'(t)dt$ , podemos escribir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b P dx + Q dy + R dz$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t)), Q(x(t), y(t), z(t)), R(x(t), y(t), z(t))) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt\end{aligned}$$

- Cuando una curva  $C$  es parametrizada por  $\mathbf{r}(t)$  con  $t \in [a, b]$ , entonces inducimos una orientación en  $C$ . Distintas parametrizaciones pueden inducir distintas orientaciones.

Por ejemplo, en la figura se tiene la curva  $y = 2\sin(x)$  con  $x \in [0, 3]$ . Dos parametrizaciones que inducen orientaciones opuestas son  $\mathbf{r}_1(t) = (t, \sin t)$  y  $\mathbf{r}_2(t) = (3 - t, \sin(3 - t))$  ambas con  $t \in [0, 3]$ .



**Figura 7.14:** Orientación inducida por dos parametrizaciones.

Si  $r_1(t)$  parametriza  $C$  en una dirección con vector tangente  $T$  y  $r_2(t)$  parametriza  $C$  en sentido contrario, con vector tangente  $-T$ , entonces denotamos la segunda curva como  $-C$  y admitimos como válido que

**Convenio**

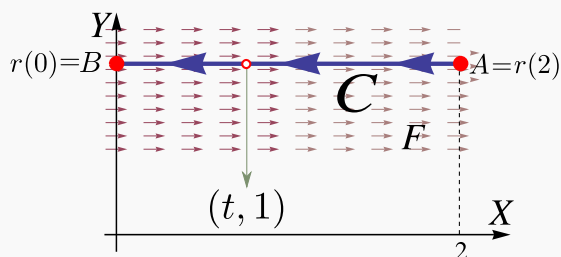
$$\int_{-C} F \cdot d\mathbf{r} = - \int_C F \cdot d\mathbf{r}$$

- Más adelante, cuando veamos el teorema de Green, usaremos la siguiente noción de orientación: *la curva cerrada  $C$  está orientada positivamente, respecto a una región  $D$ , si al movernos sobre  $C$ , la región siempre está a nuestra izquierda.*
- Note que el trabajo  $W$  puede ser un número negativo. Esto ocurre cuando la fuerza actúa en contra del desplazamiento de la partícula.
- En la sección 7.10, la integral  $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$  se interpreta como “la suma” de las componentes de  $\mathbf{F}$  tangentes a la curva. Si  $C$  es cerrada, esta integral indica cómo  $\mathbf{F}$  tiende a circular alrededor de la curva. Esta interpretación es la que usamos para el teorema de Green.

**Ejemplo 7.17**

Consideremos una fuerza constante  $\mathbf{F}(x, y) = 1\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}$ . Calcule  $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$  si  $C$  el segmento de recta que se muestra en la figura.

**Solución:** Usamos a  $x = t$  como parámetro. La parametrización  $\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}$ ,  $t \in [0, 2]$ , parametriza a “ $-C$ ” pues  $\mathbf{r}(0) = (0, 1) = B$  y  $\mathbf{r}(2) = (2, 1) = A$ .



**Figura 7.15:** Curva  $C$

Es costumbre escribir,

$$-C: \mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}}, \quad t \in [0, 2],$$

$$\mathbf{r}'(t) = \hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}$$

Como  $\mathbf{F}(x, y) = 1\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}$  entonces  $P(x, y) = 1$  y  $Q(x, y) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= - \int_C (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \cdot (\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t)) dt \\
 &= - \int_0^2 (1, 0) \cdot (1, 0) dt \\
 &= - \int_0^2 1 dt = -2
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 7.18

Sea  $\mathbf{F}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + (x + y) \hat{\mathbf{j}}$ . Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  si  $C$  es la curva de ecuación es  $y = x^2$ ,  $x \in [-1, 2]$  tal y como se muestra en la figura.

**Solución:** Usamos a  $x = t$  como parámetro. La parametrización  $\mathbf{r}(t) = t \hat{\mathbf{i}} + t^2 \hat{\mathbf{j}}$ ,  $t \in [-1, 2]$ , parametriza a “ $-C$ ” pues  $\mathbf{r}(-1) = (-1, 1) = B$  y  $\mathbf{r}(2) = (2, 4) = A$ .

Es costumbre escribir,

$$-C: \mathbf{r}(t) = t \hat{\mathbf{i}} + t^2 \hat{\mathbf{j}}, \quad t \in [-1, 2],$$

$$\mathbf{r}'(t) = 1 \hat{\mathbf{i}} + 2t \hat{\mathbf{j}}$$

Como  $\mathbf{F}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + (x + y) \hat{\mathbf{j}}$  entonces  $P(x, y) = x$  y  $Q(x, y) = x + y$ .

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= - \int_C (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \cdot (\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t)) dt \\
 &= - \int_{-1}^2 (t, t + t^2) \cdot (1, 2t) dt \\
 &= - \int_{-1}^2 t + 2t^2 + 2t^3 dt = -15
 \end{aligned}$$

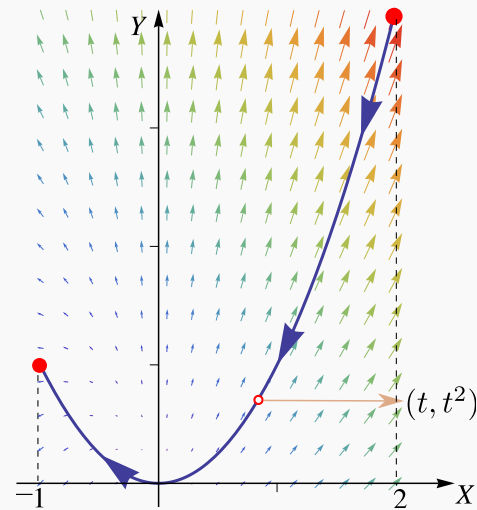


Figura 7.16: Curva C

**Ejemplo 7.19**

Calcular  $\int_C y^2 dx + x^2 dy$  donde  $C$  es la elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Solución:** Podemos usar la parametrización

$$-C: \mathbf{r}(\theta) = 2\cos\theta \hat{\mathbf{i}} + 3\sin\theta \hat{\mathbf{j}} \text{ con } \theta \in [0, 2\pi].$$

Como  $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$  entonces  $P = y^2$  y  $Q = x^2$ .  
Entonces,

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x^2 dy &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_0^{2\pi} (9\sin^2\theta, 4\cos^2\theta) \cdot (-2\sin\theta, 3\cos\theta) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} -18\sin^3\theta + 12\cos^3\theta d\theta = 0 \quad (\text{Usar: } \cos^3\theta = (1 - \sin^2\theta)\cos\theta.) \end{aligned}$$

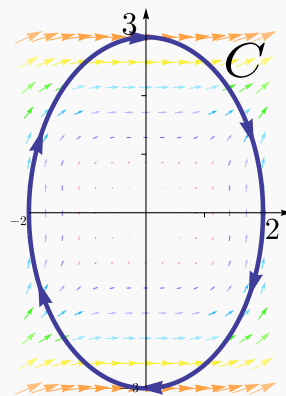


Figura 7.17: Curva  $C$ .

**Ejemplo 7.20**

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\ln(yz) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{x^2}{y} - 5e^x\right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{x^2}{z} + 2z\right) \hat{\mathbf{k}}$  y sea  $C$  la curva de la figura. Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

**Solución:**

$$\begin{cases} -C_1: \mathbf{r}_1(t) = (0, t, 1) \text{ con } t \in [1, 3], \\ C_2: \mathbf{r}_2(t) = (0, 1, t) \text{ con } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

[Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

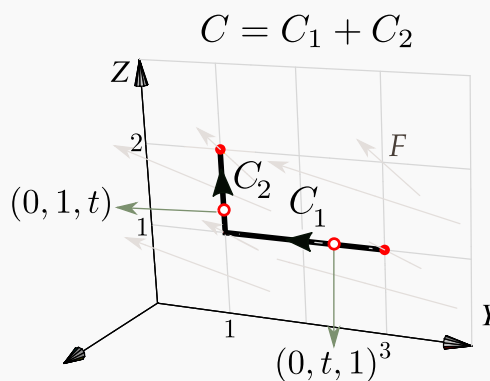


Figura 7.18: Curva  $C = C_1 \cup C_2$ .

Luego

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt + \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt \\
 &= - \int_1^3 \mathbf{F}(0, t, 1) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt + \int_1^2 \mathbf{F}(0, 1, t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt \\
 &= - \int_1^3 (0, -5, 2) \cdot (0, 1, 0) dt + \int_1^2 (0, -5, 2t) \cdot (0, 0, 1) dt \\
 &= - \int_1^3 [0 + (-5) \cdot 1 + 0] dt + \int_1^2 [0 + 0 + (2t) \cdot 1] dt = 13
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 7.21

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + \cos x) \hat{\mathbf{i}} + (2z + x \cos x) \hat{\mathbf{j}} + x \hat{\mathbf{k}}$ .

Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  si  $C = C_1 + C_2 + C_3$ , tal y como se muestra en la figura de la derecha.

**Solución:**

Una parametrización para  $C$  es

$$C: \begin{cases} -C_1: \mathbf{r}_1(t) = (2, 1, t), t \in [0, 2] \\ -C_2: \mathbf{r}_2(t) = (t, 1, 0), t \in [0, 2] \\ -C_3: \mathbf{r}_3(t) = (0, t, 0), t \in [0, 1] \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_0^2 (t + \cos(2), 2t + 2\cos(2), 2) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt - \int_0^2 (\cos t, t \cos t, t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt - \int_0^1 (t, 0, 0) \cdot \mathbf{r}'_3(t) dt \\
 &= - \int_0^2 (t + \cos(2), 2t + 2\cos(2), 2) \cdot (0, 0, 1) dt - \int_0^2 (\cos t, t \cos t, t) \cdot (1, 0, 0) dt - \int_0^1 (t, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) dt \\
 &= - \int_0^2 2t dt - \int_0^2 \cos t dt - 0 \\
 &= -t^2 \Big|_0^2 - \sin t \Big|_0^2 = -4 - \sin(2)
 \end{aligned}$$

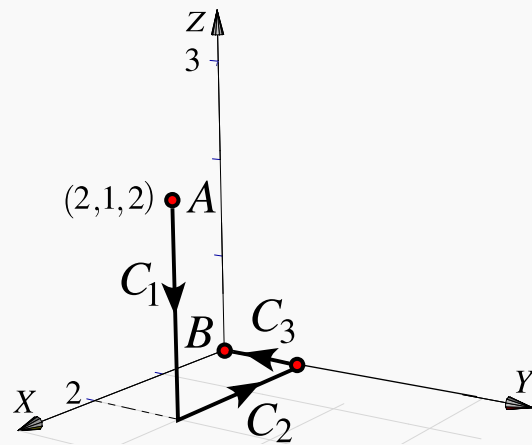


Figura 7.19



**Ejemplo 7.22**

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y) \hat{\mathbf{i}} + (y - z) \hat{\mathbf{j}} + (x + z) \hat{\mathbf{k}}$  y sea  $C$  la curva de la figura 7.20. Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

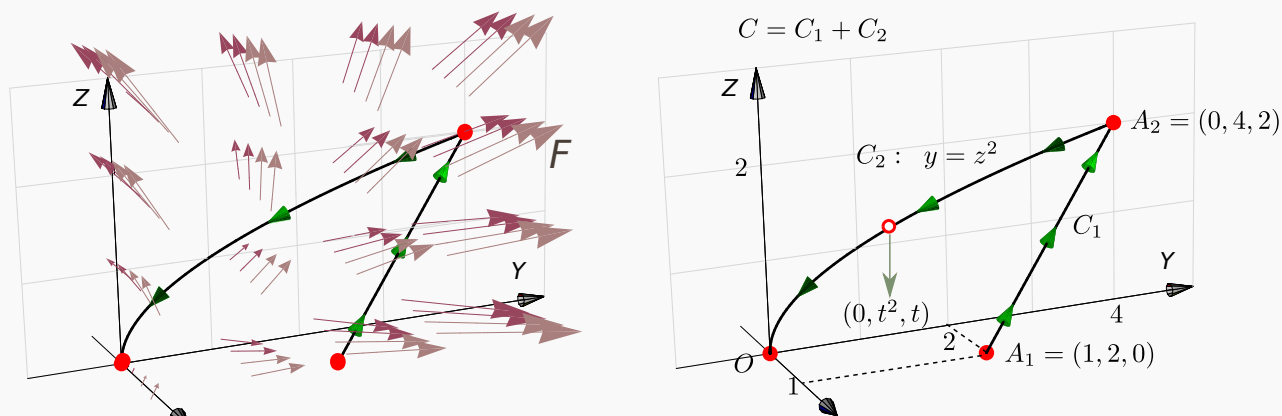
**Solución:** Primero parametrizamos  $C$ .

$C_1$  se puede parametrizar usando la fórmula para el segmento de recta que va desde  $A_1 = (1, 2, 0)$  hasta  $A_2 = (0, 4, 2)$ , es decir,

$$C_1 : \mathbf{r}_1(t) = A_1 + t(A_2 - A_1) = (1 - t) \hat{\mathbf{i}} + (2 + 2t) \hat{\mathbf{j}} + 2t \hat{\mathbf{k}}, \text{ con } t \in [0, 1].$$

$C_2$  se puede parametrizar tomando  $z = t$ .

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Figura 7.20:** Curva  $C$

$$\begin{cases} C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (1 - t) \hat{\mathbf{i}} + (2 + 2t) \hat{\mathbf{j}} + 2t \hat{\mathbf{k}}, t \in [0, 1], & \checkmark \\ -C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (0, t^2, t), t \in [0, 2], & \mathbf{r}_2(0) = (0, 0, 0) \text{ y } \mathbf{r}_2(2) = A_2. \end{cases}$$

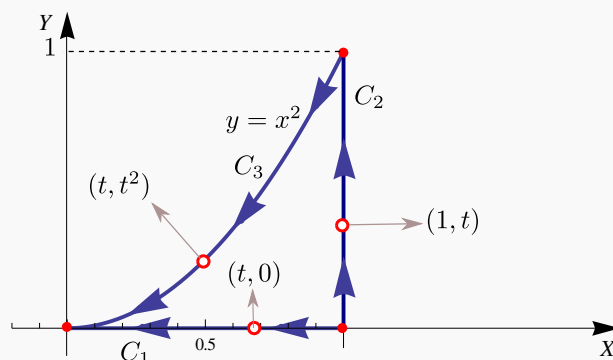
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt - \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt \\ &= \int_0^1 (3 + t, 2, 1 + t) \cdot (-1, 2, 2) dt - \int_0^2 (t^2, t^2 - t, t) \cdot (0, 2t, 1) dt \\ &= \int_0^1 t + 3 dt - \int_0^2 t - 2t^2 + 2t^3 dt = -\frac{23}{6} \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.23**

Sea  $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ . Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $C$  es la curva de la figura 7.21.

**Solución:** Parametrizamos  $C$ ,

$$\begin{cases} C_1 : r_1(t) = (t, 0) \text{ con } t \in [0, 1] \\ C_2 : r_2(t) = (1, t) \text{ con } t \in [0, 1] \\ -C_3 : r_3(t) = (t, t^2) \text{ con } t \in [0, 1] \end{cases}$$

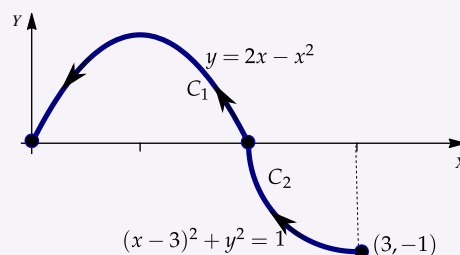


**Figura 7.21:** Curva  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ .

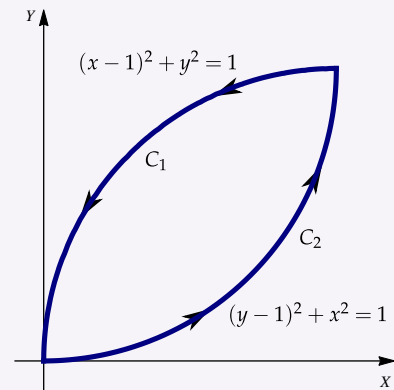
$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x^2 dy &= \int_{C_1} y^2 dx + x^2 dy + \int_{C_2} y^2 dx + x^2 dy - \int_{-C_3} y^2 dx + x^2 dy \\ &= \int_0^1 (0, t^2) \cdot (1, 0) dt + \int_0^1 (t^2, 1) \cdot (0, 1) dt - \int_0^1 (t^4, t^2) \cdot (1, 2t) dt \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 1 dt - \int_0^1 [t^4 + 2t^3] dt = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

**31****Ejercicios**

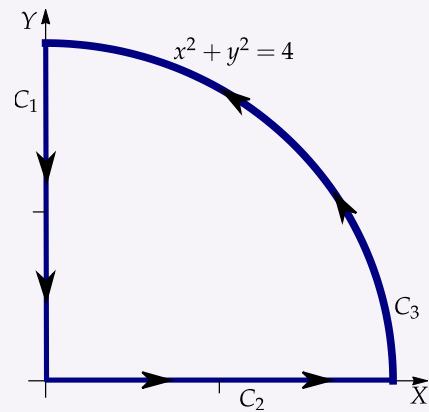
**7.14** Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ ,  $C_1 : (x-3)^2 + y^3 = 1$  donde  $C = C_1 \cup C_2$ .



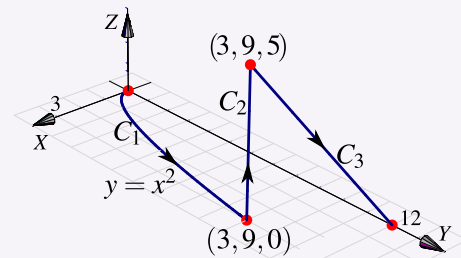
**7.15** Calcule  $\int_C x dy - y dx$  donde  $C = C_1 \cup C_2$



**7.16** Calcule la integral  $\int_C F \cdot dr$  donde  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ , y además  $F(x, y) = (2y + \sqrt{9 + x^3})\mathbf{i} + (5x + e^{\arctan y})\mathbf{j}$

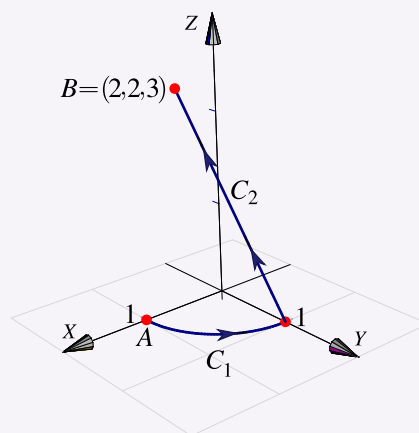


**7.17** Calcule  $\int_C x^2 z dx - yx^2 dy + 3xz dz$  donde  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$  (figura de la derecha).



**7.18** Evalúe la integral de línea  $\int_C x ds$  donde  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$  es la curva del ejercicio anterior.

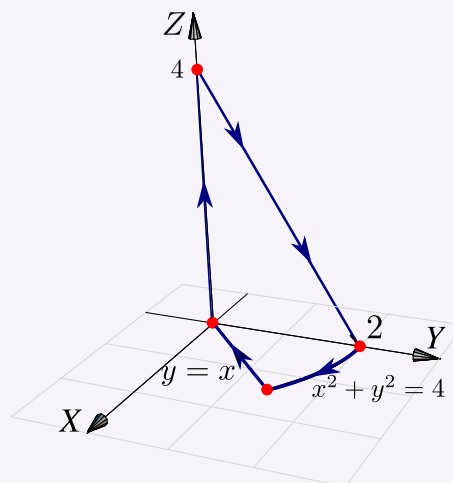
**7.19** Calcule  $I = \int_C x dx + z dy + dz$ . La curva  $C = C_1 \cup C_2$  es la curva que aparece en la figura;  $C_1$  es un trozo de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y  $C_2$  es el segmento que va de  $(0, 1, 0)$  a  $B = (2, 2, 3)$ .



**7.20** Considere el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 4xe^z \hat{\mathbf{i}} + y \cos(z) \hat{\mathbf{j}} + 2x^2 e^z \hat{\mathbf{k}}.$$

Sea  $C$  la curva de la figura a la derecha. Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .



## 7.7 Campos conservativos. Independencia de la trayectoria.

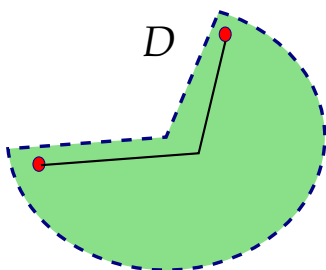
Una condición para que la integral de línea no dependa de la trayectoria que une a  $A$  con  $B$  es que exista  $\varphi$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla \varphi$  con  $\varphi \in C^1$ . En este caso podemos calcular la integral de línea usando cualquier camino que una  $A$  con  $B$  o también, usando el Teorema Fundamental para la integral de línea.

### Definición 7.6

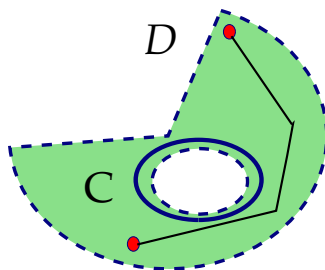
Un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  se dice *conexo* si todo par de puntos de  $D$  se pueden unir con una curva regular a trozos contenida en  $D$ . Es decir,  $D$  es de “una sola pieza”.

Un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo se dice *simplemente conexo* si toda curva cerrada simple  $C$  en  $D$ , encierra una región que está también en  $D$ . Es decir, los conjuntos simplemente conexos no tienen “agujeros”.

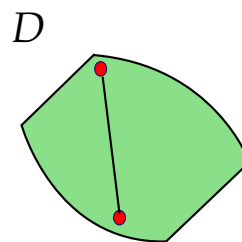
Un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  se dice *convexo* si para todo par de puntos  $A, B \in D$ , el segmento de recta que une  $A$  con  $B$  está contenido en  $D$ , es decir,  $\{A + t(B - A) : t \in [0, 1]\} \subset D$ .



$D$  es simplemente conexo, pero no convexo



$D$  es conexo pero no simplemente conexo



$D$  es convexo

### Definición 7.7

Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial definido sobre un conjunto abierto  $U$ . Si  $\varphi$  es una función diferenciable sobre  $U$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ , decimos que  $\varphi$  es una *función potencial* de  $\mathbf{F}$ . También decimos que  $\mathbf{F}$  es *conservativo*.

Si  $U$  es conexo y  $\mathbf{F}$  conservativo, las funciones potenciales de  $\mathbf{F}$  son iguales salvo constantes. También se puede mostrar que si  $\mathbf{F} = (P, Q)$  y si  $P_y \neq Q_x$ , entonces  $\mathbf{F}$  no es conservativo (no tiene función potencial). La condición  $P_y = Q_x$  es *solo necesaria* para que  $\mathbf{F}$  sea conservativo. La condición es *necesaria y suficiente* si  $U$  es *simplemente conexo*.

### Teorema 7.1 (Test de derivadas mixtas).

Sea  $\mathbf{F} = P \hat{\mathbf{i}} + Q \hat{\mathbf{j}}$  es de clase  $C^1$  en un conjunto *simplemente conexo*  $D$  del plano. Decimos que  $\mathbf{F}$  es *conservativo* sii

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sea  $\mathbf{F} = P \hat{\mathbf{i}} + Q \hat{\mathbf{j}} + R \hat{\mathbf{k}}$  es de clase  $C^1$  en un conjunto *simplemente conexo*  $D$  del espacio. Decimos que  $\mathbf{F}$  es *conservativo* sii

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

### Teorema 7.2 (Teorema Fundamental para integrales de línea).

Sea  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  donde  $D$  es conexo y abierto. Sea  $C$  una curva regular a trozos en  $D$  parametrizada por  $\mathbf{r}$  y sean  $A = \mathbf{r}(a)$  y  $B = \mathbf{r}(b)$ ; se tiene

$$\int_C \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

### Teorema 7.3 (Campos conservativos).

Sea  $D$  simplemente conexo. Sea  $C$  una curva orientada y simple contenida en  $D$  y parametrizada por  $\mathbf{r}$ . Suponemos que  $C$  inicia en  $A$  y termina en  $B$ . Sea  $\mathbf{F}$  un campo definido en  $D$ .

- $\mathbf{F}$  es conservativo  $\iff$  existe  $\varphi$  de clase  $C^1$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ , sobre  $D$ .
- Si  $\mathbf{F}$  es conservativo, existe  $\varphi$  de clase  $C^1$  tal que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$
- Si  $\mathbf{F}$  es conservativo,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $C'$  es cualquier curva, contenida en  $D$ , regular a trozos y que une  $A$  con  $B$ .
- $\mathbf{F}$  es conservativo  $\iff \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para cualquier curva cerrada simple  $C$  contenida en  $D$ .

Observe que si  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para alguna curva cerrada simple  $C$ , esto no significa que  $\mathbf{F}$  sea conservativo. En la parte 3. del ejemplo 7.6 tenemos un campo con integral nula sobre una elipse pero que no es conservativo.

### Ejemplo 7.24

Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x \ln(yz) - 5ye^x) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{x^2}{y} - 5e^x\right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{x^2}{z} + 2z\right) \hat{\mathbf{k}}$  y sea  $C$  una curva simple que une  $A = (2, 2, 1)$  con  $B = (3, 1, e)$ . Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

**Solución:**  $\mathbf{F}$  es de clase  $C^1$  en la región  $D = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ . Esta región es simplemente conexa.

El campo es conservativo en esta región pues,



usando un camino  $C'$ .

**Primer Manera:** Con un camino  $C'$  que inicia en  $(2, 0, 4)$  y termina en  $(0, 0, 0)$ . El camino que hemos escogido se ve en la figura.

$$\begin{cases} -C_1 & : r_1(t) = (t, 0, 4) \text{ con } t \in [0, 2] \\ -C_2 & : r_2(t) = (0, 0, t) \text{ con } t \in [0, 4] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{C'} F \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} F \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} F \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_0^2 \mathbf{F}(t, 0, 4) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt - \int_0^4 \mathbf{F}(0, 0, t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt \\ &= - \int_0^2 (4e^4 t, 1, 2e^4 t^2) \cdot (1, 0, 0) dt - \int_0^4 (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= - \int_0^2 4te^4 dt = -8e^4. \end{aligned}$$

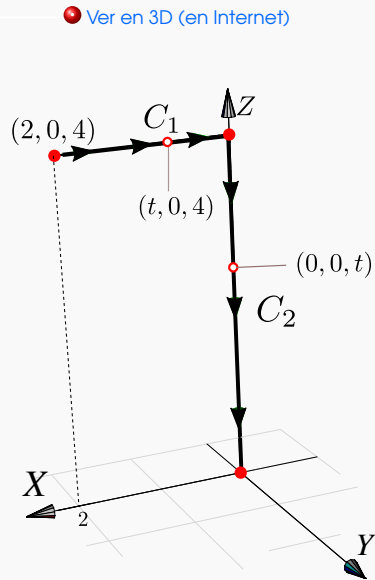


Figura 7.23: Curva  $C' = C_1 \cup C_2$ .

**Segunda Manera:** Con una función potencial.

$$\begin{cases} \varphi_x = 4xe^z \implies \varphi(x, y, z) = \int 4xe^z dx = 2x^2 e^z + K_1(y, z), \\ \varphi_y = \cos(y) \implies \varphi(x, y, z) = \int \cos y dy = \text{sen } y + K_2(x, z), \implies \varphi(x, y, z) = 2x^2 e^z + \text{sen } y + C \\ \varphi_z = 2x^2 e^z \implies \varphi(x, y, z) = \int 2x^2 e^z dz = 2x^2 e^z + K_3(x, y). \end{cases}$$

Finalmente,  $\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \varphi(0, 0, 0) - \varphi(2, 0, 4) = -8e^4$ .

**Comentario:** La condición “*simplemente conexo*” para que  $F$  sea conservativo.

Sea  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  definido en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Se verifica que  $P_y = Q_x$  pero

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \text{ si } C \text{ es la circunferencia } x^2 + y^2 = 1,$$

lo cual indica que  $F$  no tiene función potencial.



Lo mismo pasa si consideramos  $F(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$  para  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

El problema en principio es que se requiere que  $F$  esté definido en una región **simplemente conexa**, pero la explicación detallada de este fenómeno con el campo  $F$  es una cuestión topológica que tiene que ver con homotopías. Un artículo sencillo de leer sobre esto, lo puede encontrar en V. Pati, "How Topology Governs Analysis"

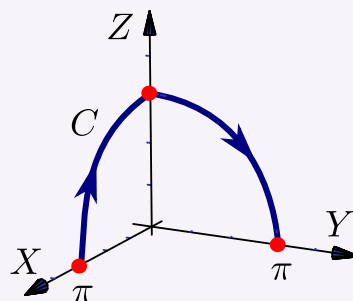
<http://www.isibang.ac.in/~statmath/stinc/database/notes/puncturedplane.pdf>

## 32

## Ejercicios

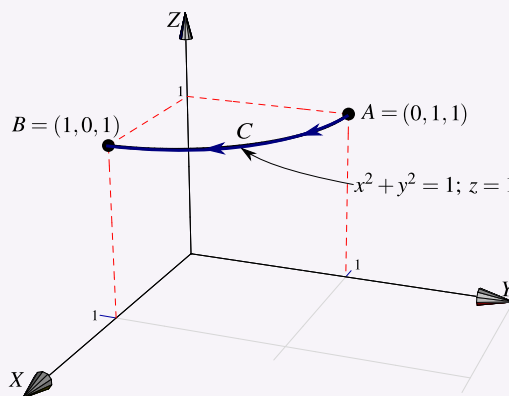
**7.21** Considere el campo vectorial  $F(x, y, z) = (yz^2 - \sin x \sin(\pi - y), xz^2 - \cos(\pi - y) \cos x, 2xyz)$  y sea  $C$  la curva que une los puntos  $(\pi, 0, 0)$  con  $(0, \pi, 0)$ , como se ve en la figura

- Verifique que  $F$  es conservativo.
- Calcule  $\int_C F \cdot dr$  usando una función potencial.



**7.22** Sea  $F(x, y, z) = (2x + 5) \hat{i} + (3y^2) \hat{j} + \frac{1}{z} \hat{k}$  y  $C$  la trayectoria que va de  $A = (0, 1, 1)$  hasta  $B = (1, 0, 1)$  de acuerdo a la figura de la derecha.

- Verifique que el campo vectorial  $F$  es conservativo.
- Calcule la integral de línea  $\int_C F \cdot dr$  utilizando una función potencial.
- Calcule la integral de línea  $\int_C F \cdot dr$ , sin usar una función potencial.

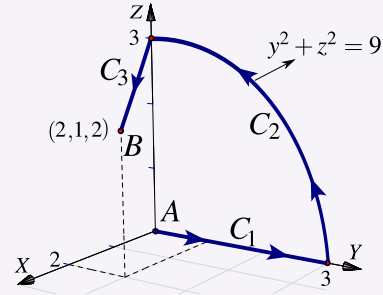


**7.23** Sea  $F$  definido por

$$F(x, y, z) = (yz + y \cos(xy)) \hat{i} + (xz + x \cos(xy)) \hat{j} + xy \hat{k}$$

y  $C$  la trayectoria que va de  $A$  hasta  $B$  de acuerdo a la figura de la derecha.

- Verifique que el campo vectorial  $F$  es conservativo.
- Calcule la integral de línea  $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$  utilizando una función potencial.
- Calcule la integral de línea  $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$  sin usar una función potencial.

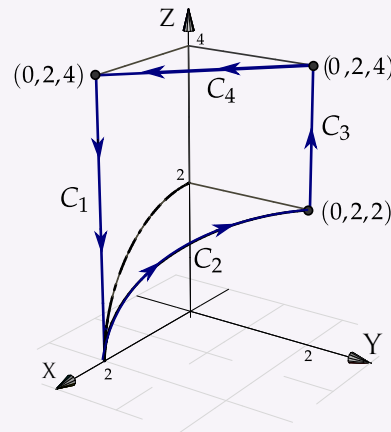


**7.24** Sea  $F$  definido por

$$F(x, y, z) = x \hat{i} - y \hat{j} + z \hat{k}$$

y  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  la curva que se muestra en la figura de la derecha.

- Verifique que el campo vectorial  $F$  es conservativo.
- Calcule la integral de línea  $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$  utilizando una función potencial.
- Calcule la integral de línea  $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$  sin usar una función potencial.



**7.25** Sea  $F$  un campo de fuerzas tal que  $F(x, y, z) = (2xy + z^3) \hat{i} + x^2 \hat{j} + 3xz^2 \hat{k}$ .

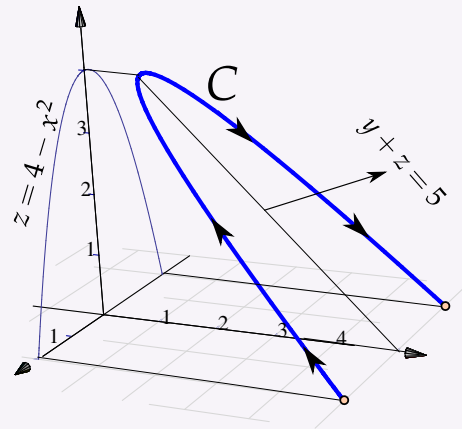
- Demostrar que  $F$  es un campo de fuerzas conservativo.
- Hallar una función potencial de  $F$ .
- Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición  $(1, 1, 1)$  hasta  $(1, 1, 2)$ .

**7.26** Sea  $F$  un campo de fuerzas tal que  $F(x, y, z) = (yz - y^2 + 2xz) \hat{i} + (xz - 2xy) \hat{j} + (xy + x^2) \hat{k}$ .

- a.) Demostrar que  $F$  es un campo de fuerzas conservativo.
- b.) Hallar una función potencial de  $F$ .
- c.) Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición  $(0, 1, 0)$  hasta  $(-1, -1, 0)$ .

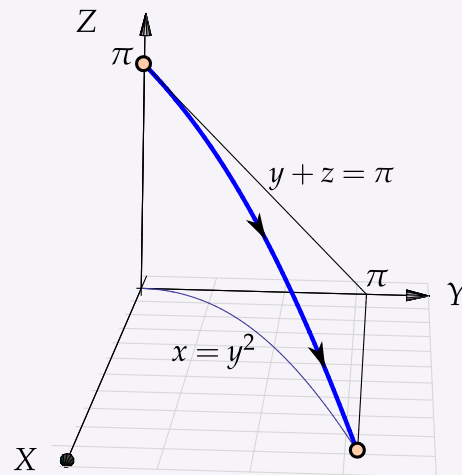
**7.27** Sea  $F$  un campo de fuerzas tal que  $F(x, y, z) = -(2x + 3x^2z^2)\mathbf{i} + (2y + 3y^2z^4)\mathbf{j} - (2x^3z + 4y^3z^3)\mathbf{k}$ .

- a.) Demostrar que  $F$  es un campo de fuerzas conservativo.
- b.) Calcule la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$



**7.28** Sea  $F$  un campo de fuerzas tal que  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left( y \cos(xy) + \frac{1}{x+1}, x \cos(xy), \frac{1}{z+1} \right)$ .

- a.) Demostrar que  $F$  es un campo de fuerzas conservativo.
- b.) Calcule la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$



**7.29** Sea  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  definido en  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Verifique que  $P_y = Q_x$  pero que sin embargo,  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$  si  $C$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .

## 7.8 Teorema de Green (en el plano).

El siguiente teorema, llamado “Teorema de Green en el plano”, aplica para regiones planas limitadas por curvas cerradas y simples, regulares a trozos. Una idea intuitiva, en términos de “circulación”, se puede ver en la sección 7.10.

### Teorema 7.4 (Teorema de Green en el plano).

Sean  $P$  y  $Q$  campos escalares derivables con continuidad en un conjunto abierto  $S_1$  del plano  $XY$ . Sea  $C$  una curva simple cerrada regular a trozos y sea  $D$  la región encerrada por  $C$  (es decir,  $C = \partial D$ ). Si  $D$  está contenida en  $S$ , se tiene la identidad

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

donde  $C$  es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

● Intuitivamente,  $C$  es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj si al caminar a lo largo de  $C$  la región  $D$  está siempre a la izquierda. Notar que  $C = \partial D$  indica que  $C$  es la *frontera* de  $D$ .

### Ejemplo 7.26

Calcular  $\int_C y^2 dx + x^2 dy$  si  $C$  es la curva de la figura.

#### Solución:

En este caso,  $P(x, y) = y^2$  y  $Q(x, y) = x^2$ . Como se cumplen las condiciones del teorema de Green entonces,

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x^2 dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 2x - 2y dy dx \\ &= \int_0^1 2x^3 - x^4 dx = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

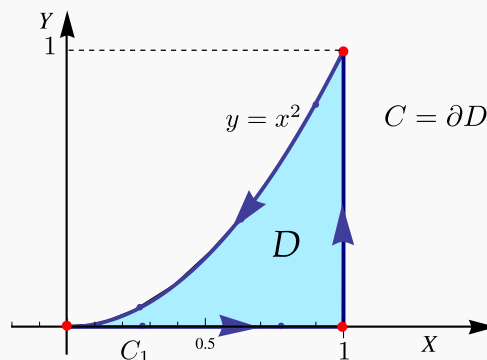


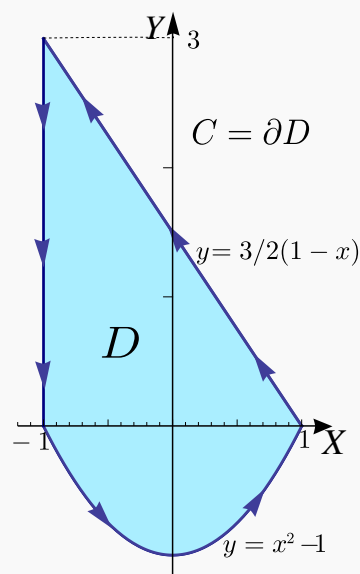
Figura 7.24: Curva  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ .

**Ejemplo 7.27**

Calcular  $\int_C (x+y)dx + (3x + \arctan y)dy$  si  $C$  es la curva de la figura.

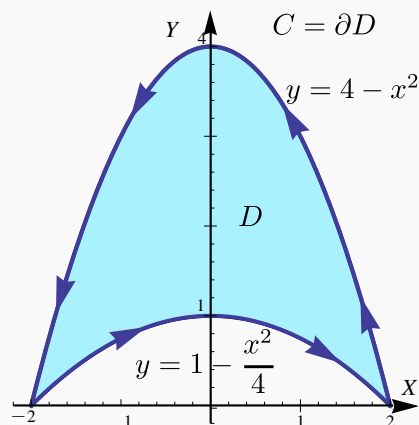
**Solución:** En este ejemplo,  $P(x, y) = x + y$  y  $Q(x, y) = 3x + \arctan(y)$ . Como se cumplen las condiciones del teorema de Green, entonces

$$\begin{aligned} \int_C (x+y)dx + (3x + \arctan y)dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{\frac{3-3x}{2}} 3-1 dy dx \\ &= \int_{-1}^1 5-3x-2x^2 dx = \frac{26}{3} \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.28**

Calcular  $\int_C (x + \arcsen x)dx + (2x + \ln(y^2 - 3))dy$  si  $C$  es la curva de la figura.

**Solución:** En este ejemplo,  $P(x, y) = x + \arcsen x$  y  $Q(x, y) = 2x + \ln(y^2 - 3)$ . Como se cumplen las condiciones del teorema de Green podemos poner



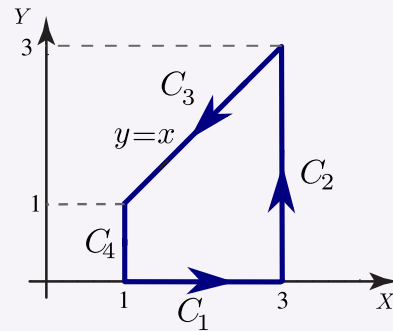
$$\begin{aligned}
 \int_C (x + \arcsen x) dx + (2x + \ln(y^2 - 3)) dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{1-x^2/4}^{4-x^2} 2 dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 6 - \frac{3x^2}{2} dx = 16.
 \end{aligned}$$

## 33

## Ejercicios

**7.30** Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial dado por  $\mathbf{F}(x, y) = (x + y) \hat{\mathbf{i}} - (x^2 + y^2) \hat{\mathbf{j}}$ . La curva  $C$  es la frontera del trapecio limitado por las curvas  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$  y  $y = x$  como se muestra en la figura.

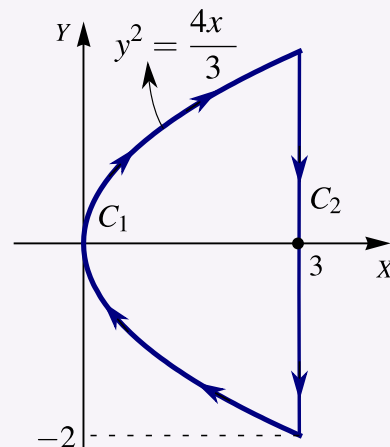
- Calcular la integral  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  usando el teorema de Green.
- Calcular la integral  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  **sin utilizar** el teorema de Green.



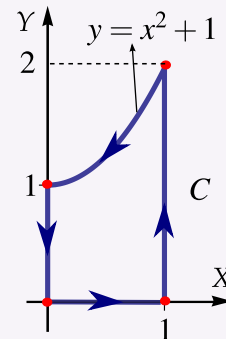
**7.31** Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = x \hat{\mathbf{i}} + (x + y^2) \hat{\mathbf{j}}.$$

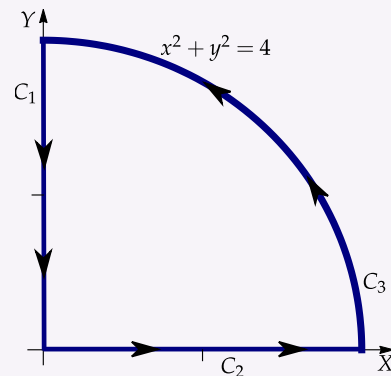
Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $C = C_1 + C_2$  tal y como se muestra en la figura a la derecha.



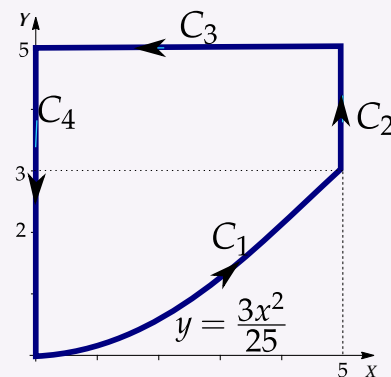
**7.32** Considere el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$ . Calcule la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $C$  es la curva que se muestra en la figura a la derecha



**7.33** Calcule la integral  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ , y  $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 + \sqrt{2 + \cos x}) \mathbf{i} + (yx^2 - ye^{\sin y}) \mathbf{j}$



**7.34** Calcule  $\int_C (4y + \arctan(x/5)) dx + (x^2 + \ln(y+1)) dy$  donde  $C$  es el camino representado en la figura a la derecha.



## 7.9 Área como una integral de línea.

Si  $P(x, y) = 0$  y  $Q(x, y) = x$  entonces  $Q_x - P_y = 1$ , aplicando el teorema de Green (si se cumplen las condiciones) obtenemos otra manera para calcular el área de  $A_D$  siendo la frontera de la región  $D$  una curva orientada contra-reloj.

$$\oint_C 0 dx + x dy = \iint_D 1 dA = A_D$$

Lo cual puede ser conveniente si la integral de línea no ofrece gran dificultad.

### Teorema 7.5

Si  $D$  es una región plana limitada por una curva  $C$ , cerrada simple, regular a trozos y orientada contra-reloj, entonces el área de  $D$  viene dada por

$$A_D = \oint_C x \, dy$$

### Ejemplo 7.29

Calcular el área de la región encerrada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Solución:** Parametrizamos la elipse con  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \, \hat{\mathbf{i}} + b \sin t \, \hat{\mathbf{j}}$  con  $t \in [0, 2\pi[$ . Esta parametrización orienta la elipse contra-reloj. En este caso,  $x = a \cos t$  mientras que  $y = b \sin t$  y  $dy = b \cos t \, dt$ ,

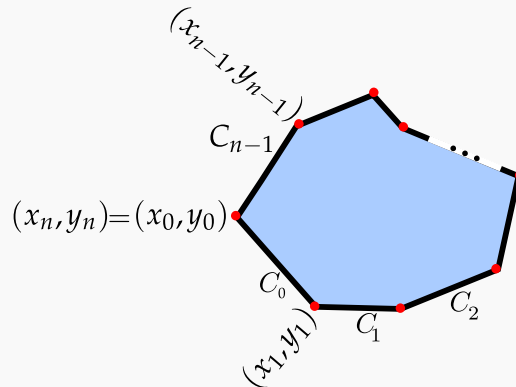
$$A_D = \int_C x \, dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t \, dt = \pi ab.$$

### Ejemplo 7.30 (Área de un polígono simple).

Verifique que el área de un polígono simple de  $n$  vértices  $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$  es

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k)}{2}$$

Asumimos que  $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ .



**Solución:** El área del polígono es, por el teorema de Green en el plano,



$$A_P = \oint_C x dy = \iint_D 1 dA$$

Aquí  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1}$  y cada segmento  $C_i$  está parametrizado por

$$r_i(t) = ((x_{k+1} - x_k)t + x_k, (y_{k+1} - y_k)t + y_k) \quad \text{con } t \in [0, 1],$$

entonces,

$$A_P = \oint_C x dy = \sum_{k=0}^{n-1} \oint_{C_i} (y_{k+1} - y_k) [(x_{k+1} - x_k)t + x_k] dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k)}{2}$$

## 7.10 Teorema de Stokes (Teorema de Green en el espacio).

**Rotacional de un campo vectorial.** Sea  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  entonces *el rotacional* de  $\mathbf{F}$  es

$$\mathbf{Rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

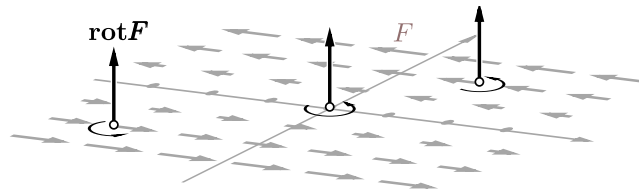
El gradiente, la divergencia y el rotacional se puede expresar en términos del *operador* “nabla”,

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

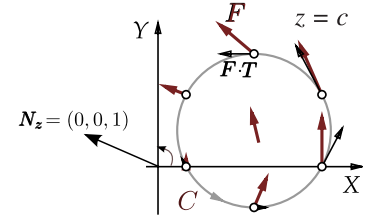
Este operador lo aplicamos como si fuera un vector. De esta manera,

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \end{aligned}$$

**Circulación y vorticidad.** La “vorticidad” es la tendencia de un fluido que se mueve a girar un objeto que es arrastrado por este fluido.



La “circulación” es el movimiento total del fluido a medida que viaja a lo largo de una curva. La circulación de un fluido sobre una circunferencia  $C$  en un plano  $z = c$  se mide con la componente tangencial de  $\mathbf{F}$ , es decir, se mide con  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  donde  $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ .



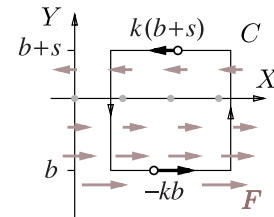
El “movimiento total” del fluido sobre  $C$  se obtiene integrando respecto a la longitud de arco,

$$\text{circulación} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Si la circunferencia es  $C: \mathbf{r}(t) = (a + r \cos t) \hat{\mathbf{i}} + (a + r \sin t) \hat{\mathbf{j}} + c \hat{\mathbf{k}}$  con  $t \in [0, 2\pi]$  y si  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-ky, 0, 0)$ , entonces  $\text{Rot } \mathbf{F} = (0, 0, k)$  y

$$\text{circulación} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k\pi r^2 = \text{Rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_z A_{\text{círculo}}$$

Sobre un cuadrado tenemos algo parecido. Sea  $C$  la frontera de un cuadrado, orientada contrareloj, en el plano  $z = c$ . Supongamos que cada uno de sus lados miden  $L$  y que estos lados son paralelos a los ejes. Como antes  $\mathbf{F} = (-ky, 0, 0)$ . En este caso,  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$  en los lados paralelos al eje  $Y$ . En el lado de arriba ( $y = b + L$ ) la velocidad tangencial es  $k(b + L)$  y el lado de abajo ( $y = b$ ) la velocidad tangencial es  $-kb$ ; por lo tanto,



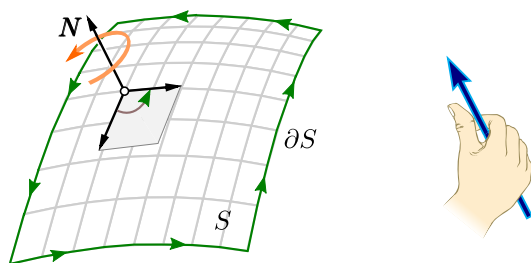
$$\text{circulación} = k(b + L)L - kbL = kL^2 = \text{Rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_z A_{\text{cuadrado}}$$

Con un (buen poco) de esfuerzo, podemos calcular la circulación de  $\mathbf{F}$  a través de la frontera de rectángulos en los otros planos y generalizar este comportamiento local para llegar a la conclusión de que si  $S_1$  es una superficie orientada, entonces

$$\text{circulación de } \mathbf{F} \text{ a través de } \partial S_1 = \text{Flujo de } \text{Rot } \mathbf{F} \text{ a través de } S_1$$

$$\int_{\partial S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_{S_1} \text{Rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \text{"circulación microscópica de } \mathbf{F"} dA$$

**Orientación positiva de  $C = \partial S_1$  respecto a  $\mathbf{N}$ .** El teorema de Stokes (o de Green en el espacio) requiere que la curva esté orientada “positivamente”, esto significa que la orientación de la curva debe ser tal que gire contra-reloj respecto al vector normal unitario  $\mathbf{N}/\|\mathbf{N}\|$ .

Orientación positiva respecto a  $\mathbf{N}$ **Figura 7.25:** Orientación positiva de  $C$  respecto a  $\mathbf{N}$ .**Teorema 7.6 (Teorema de Stokes).**

Sea  $S_1$  una superficie orientable, regular a trozos y limitada por una curva  $C = \partial S_1$ , cerrada y regular a trozos. Si  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  es de clase  $C^1$  sobre  $S_1$  y si  $\mathbf{N}$  es elegido de tal manera que  $C$  tiene orientación positiva, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} \mathbf{Rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

El teorema de Stokes se puede extender a dos o más curvas cerradas.

**Ejemplo 7.31**

Sea  $S_1$  la superficie de ecuación  $z = 2$  definida sobre el círculo  $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ , tal y como se muestra en la figura. La curva  $C$  es la frontera de  $S_1$ . Una parametrización para  $C$  es

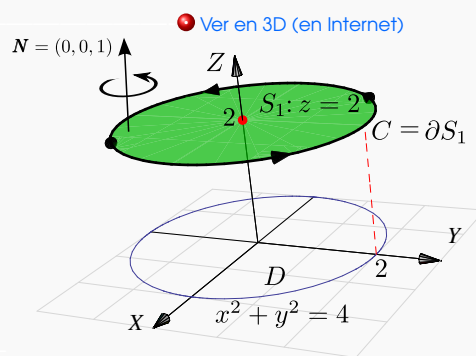
$$\mathbf{r}(t) = \underbrace{2\cos t}_{x(t)} \mathbf{i} + \underbrace{2\sin t}_{y(t)} \mathbf{j} + \underbrace{2}_{z(t)} \mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si  $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y \mathbf{i} - xz \mathbf{j} + yz^2 \mathbf{k}$ ,

a.) calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  usando la definición de integral de línea,

b.) utilice el Teorema de Stokes para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

**Solución:**



a.) Por definición de integral de línea.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (3 \cdot 2 \sin t, -(2 \cos t)(2), (2 \sin t)(2)^2) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -12 \sin^2 t - 8 \cos^2 t dt = -20\pi\end{aligned}$$

b.) La superficie es  $S: z = 2$  y la proyección es el círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .

El vector  $\mathbf{N}$  se debe tomar de acuerdo a la regla de la mano derecha:  $\mathbf{N} = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\|(-z_x, -z_y, 1)\|} = (0, 0, 1)$ .

Luego,  $\text{Rot} \mathbf{F} = (x + z^2, 0, -3 - z)$ . Entonces,

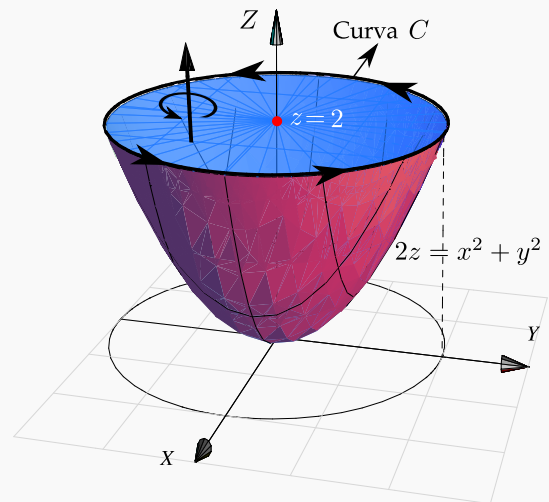
$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{Rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{R_{xy}} (x + z^2, 0, -3 - z) \cdot (0, 0, 1) dA = \iint_{R_{xy}} -3 - z dA \\ &= \iint_{R_{xy}} -5 dA, \text{ pues } S_1: z = 2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -5r dr d\theta = -20\pi\end{aligned}$$

### Ejemplo 7.32

Utilice el teorema de Stokes para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$  y  $C$  es la curva de intersección entre el paraboloide  $2z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 2$ , tal y como se muestra en la figura.

**Solución:** La curva es borde de dos superficies, el plano  $z = 2$  y también del paraboloide  $2z = x^2 + y^2$ . ¿Cuál superficie escoger, el paraboloide o el plano?

De acuerdo al Teorema de Stokes, se puede escoger cualquiera de las dos. La más simple es el plano  $z = 2$ .



Si  $S : z - 2 = 0$  entonces  $\mathbf{N} = \pm(0, 0, 1)$ . ¿Cuál signo se escoge?

Las integrales  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  y  $\iint_{S_1} \mathbf{Rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$  tienen el mismo valor si  $\mathbf{N}$  se escoge de acuerdo a la regla de la mano derecha (sino, difieren en el signo), en este caso particular y de acuerdo a la orientación de  $C$ , el que se debe escoger es  $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ .

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \mathbf{Rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS \\ &= \iint_{R_{xy}} (z^2 + x, 0, -z - 3) \cdot (0, 0, 1) dA, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-z - 3)r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-2 - 3)r dr d\theta = -10\theta \Big|_0^{2\pi} = -20\pi. \end{aligned}$$

### Ejemplo 7.33

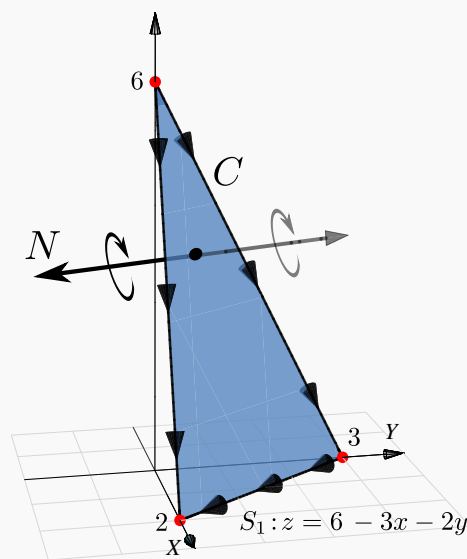
Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, 2x - z, y + z)$  y  $S_1$  la porción del plano  $3x + 2y + z = 6$  en el primer octante. Sea  $C$  la frontera de la superficie  $S_1$ . Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

**Solución:** La ecuación de la superficie  $S_1$  es  $z = 6 - 3x - 2y$ . La curva está orientada a favor de reloj respecto al vector normal  $\mathbf{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (3, 2, 1)$ , como se ve en la figura, por lo tanto debemos usar el vector  $\mathbf{N} = (z_x, z_y, -1) = (-3, -2, -1)$ . Observe que no necesitamos hacerlo unitario por la cancelación de normas en la integral de superficie.

●  $\mathbf{Rot} \mathbf{F} = (2, 0, 1)$ .

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \mathbf{Rot} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} dS \\ &= \iint_D (2, 0, 1) \cdot (-3, -2, -1) dy dx \\ &= - \int_0^2 \int_0^{3-3/2x} 7 dy dx = -21. \end{aligned}$$

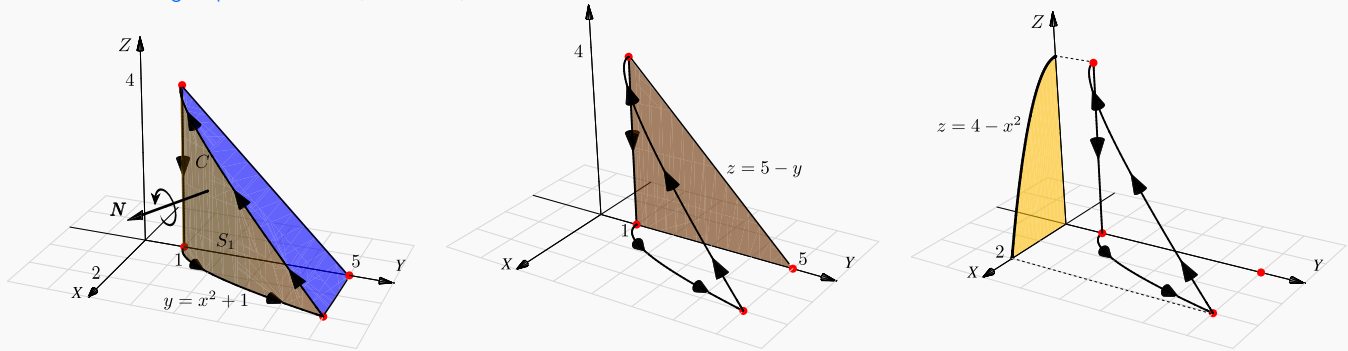
● Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



**Ejemplo 7.34**

Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, x, z^2)$ .  $C$  es la frontera de la superficie  $S_1 : y = x^2 + 1$  limitada por los planos  $z = 5 - y$  y  $z = 0$ , como se ve en la figura.

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)



**Solución:** Vamos a resolver el problema de dos maneras: Proyectando  $S_1$  sobre  $XZ$  y proyectando  $S_1$  sobre  $YZ$ .

**Proyectando  $S_1$  sobre el plano  $XZ$ .** Como  $S_1 : y = 1 + x^2$ , un vector normal es  $\mathbf{N}(x, y, z) = \pm(-y_x, 1, -y_z)$ . El normal adecuado es  $\mathbf{N}(x, y, z) = (y_x, -1, y_z) = (2x, -1, 0)$ . En la figura aparece el vector  $\mathbf{N}(1, 2, 2) = (2, -1, 0)$ .  $\text{Rot}\mathbf{F} = (0, y, 1 - z)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \text{Rot}\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} dS \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (0, y, 1-z) \cdot (2x, -1, 0) dz dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} -y dz dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} -x^2 - 1 dz dx = -48/5.
 \end{aligned}$$

**Proyectando  $S_1$  sobre el plano  $YZ$ .** Como  $S_1 : x = \sqrt{1 - y}$ , un vector normal es  $\mathbf{N}(x, y, z) = \pm(1, -x_y, -x_z)$ . El normal adecuado es  $\mathbf{N}(x, y, z) = \left(1, \frac{-1}{2\sqrt{1-y}}, 0\right)$ .  $\text{Rot}\mathbf{F} = (0, y, 1 - z)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \mathbf{Rot} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} dS \\
 &= \int_1^5 \int_0^{5-y} (0, y, 1-z) \cdot \left(1, \frac{-1}{2\sqrt{y-1}}, 0\right) dz dy \\
 &= \int_1^5 \int_0^{5-y} -\frac{y}{2\sqrt{y-1}} dz dy = -48/5.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 7.35**

● [Hacer clic en la figura para ver en 3D \(en Internet\)](#)

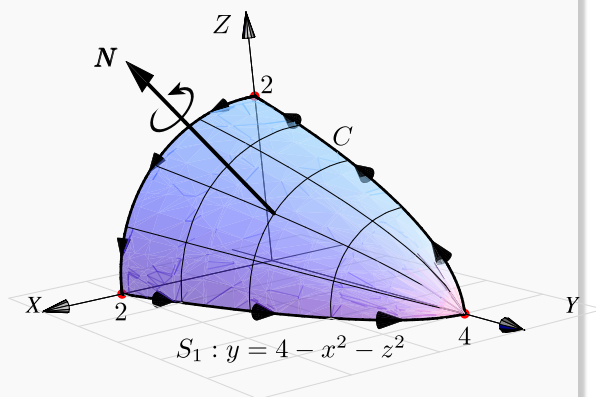
Sea  $S_1 : y = 4 - x^2 - z^2$  en el primer octante y  $C = \partial S_1$ . Calcular

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, z, y)$

**Solución:** La ecuación de la superficie  $S_1$  es  $y = 4 - x^2 - z^2$ . Vamos a proyectar sobre el plano  $XZ$ . El vector normal adecuado para que se cumpla la identidad del teorema de Stokes es  $\mathbf{N}(x, y, z) = (-y_x, 1, -y_z) = (2x, 1, 2z)$ . Para ver esto, tome un punto de la superficie  $S$ , digamos  $(1, 2, 1)$ . En este caso  $\mathbf{N}(1, 2, 1) = (2, 1, 2)$ . Al trasladarlo a la superficie, vemos que es el vector adecuado.

●  $\mathbf{Rot} \mathbf{F} = (0, 0, -x)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \mathbf{Rot} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} dS \\
 &= \iint_D (0, 0, -x) \cdot (2x, 1, 2z) dz dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} -2xz dz dx = -4.
 \end{aligned}$$

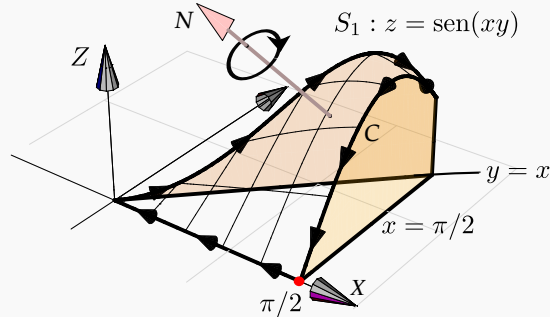


**Figura 7.26:** Curva  $C$ .

**Ejemplo 7.36**

Sea  $Q$  el sólido limitado por las superficies  $S_1 : z = \sin(xy)$ ,  $S_2 : x = \frac{\pi}{2}$  y  $S_3 : y = x$ . Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  si  $\mathbf{F} = (z, x, x)$  y  $C$  es la frontera de la superficie  $S_1$ .

● Hacer clic en la figura para ver en 3D (en Internet)



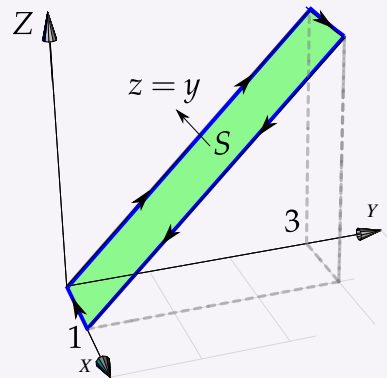
**Solución:** Como  $S_1 : z = \sin(xy)$ , entonces  $\mathbf{N}_+(x, y, z) = (-y \cos(xy), -x \cos(xy), 1)$ . Tomamos un punto de la superficie, digamos  $(1, 1, \sin(1))$ , en la figura de arriba se muestra el vector  $\mathbf{N}_+(1, 1, \sin(1))$  (trasladado) se nota que la curva  $C$  no está orientada positivamente, así que debemos tomar  $\mathbf{N}_- = (y \cos(xy), x \cos(xy), -1)$ .

Ahora,  $\text{Rot} \mathbf{F} = (0, 0, 1)$ ; proyectamos sobre el plano  $XY$ , la región de integración es el triángulo  $0 \leq x \leq \pi/2$  y  $0 \leq y \leq x$ .

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} \text{Rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^x (0, 0, 1) \cdot (y \cos(xy), x \cos(xy), -1) dy dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^x -1 dy dx = -\frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

**34****Ejercicios**

**7.35** Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $C$  es el camino que se representa en la figura a la derecha y además  $\mathbf{F}$  es el campo de fuerzas:  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + 4xy^3 \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k}$ .

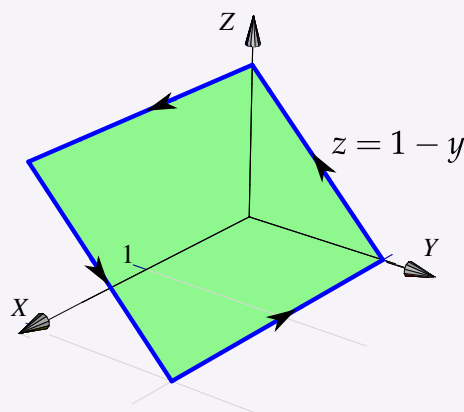




**7.36** Considere el campo de fuerzas

$$F(x, y, z) = z^2 y \cos(xy) \mathbf{i} + z^2 x(1 + \cos(xy)) \mathbf{j} + 2 \sin(xy) \mathbf{k}.$$

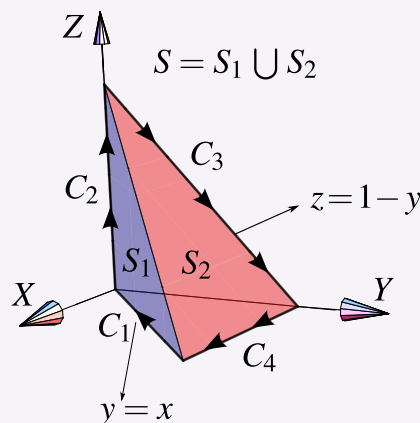
Calcule  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  si  $C$  es el camino que se indica en la figura a la derecha.



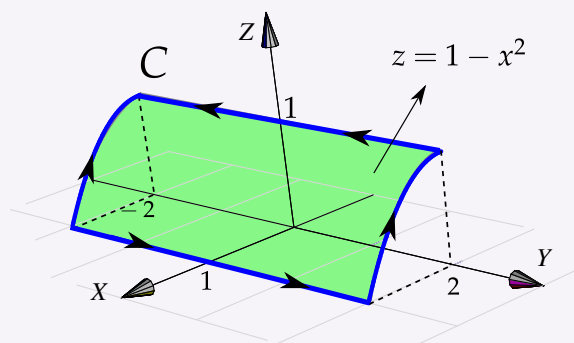
**7.37** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2 \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ . Consideremos la superficie de la figura,  $S = S_1 \cup S_2$  y la curva  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  el borde de la superficie  $S$ .

a.) Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  usando la definición de integral de línea.

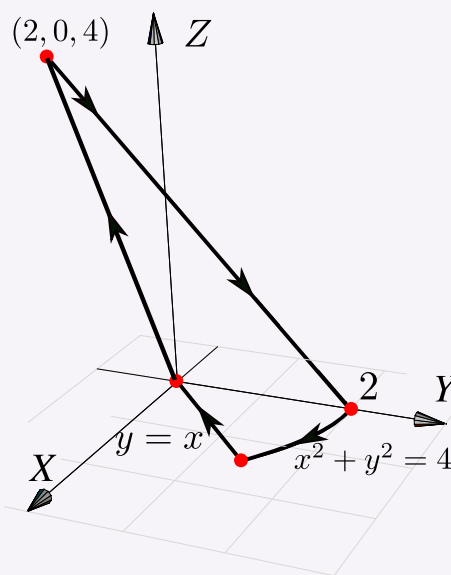
b.) Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  usando el Teorema de Stokes



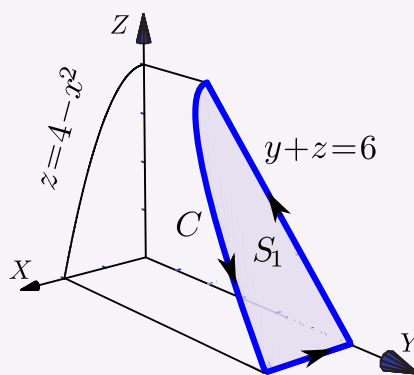
**7.38** Usando el Teorema de Stokes calcule la integral  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $F(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xz \mathbf{k}$  y  $C$  es el camino indicado en la figura a la derecha.



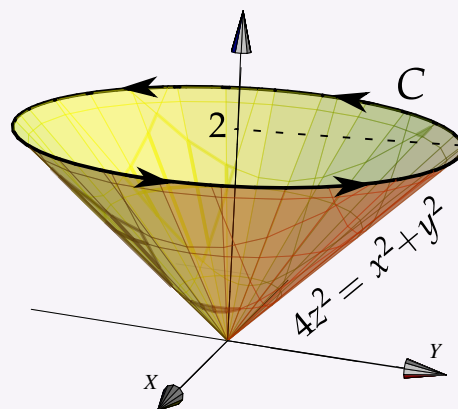
**7.39** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = -y \hat{\mathbf{i}} + z \hat{\mathbf{j}} + (x+z) \hat{\mathbf{k}}$ . Use el teorema de Stokes para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $C$  es la curva de la figura que sigue.



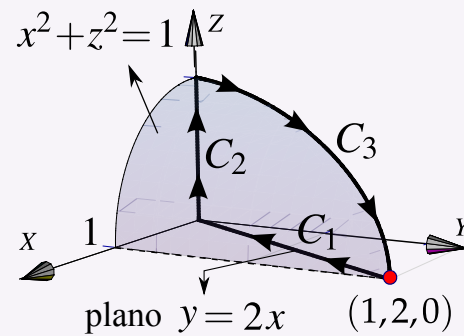
**7.40** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2yz \hat{\mathbf{i}} - 4x \hat{\mathbf{j}} - 3z^2 \hat{\mathbf{k}}$ , y sea  $C$  la curva que se obtiene al intersectar la superficie  $z = 4 - x^2$  con el plano  $y + z = 6$ , tal y como se muestra en la figura. Calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .



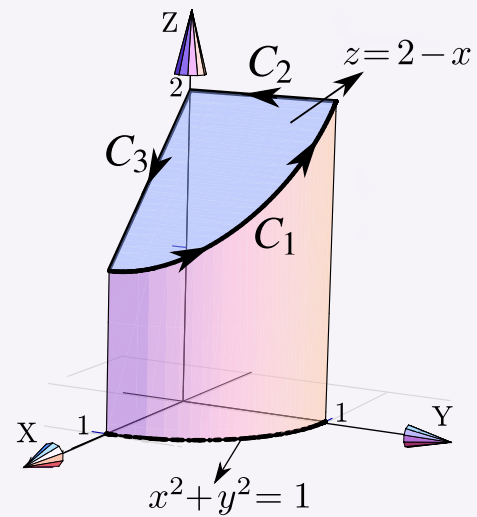
**7.41** Plantee las integrales necesarias para calcular  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  si  $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\hat{\mathbf{i}} - xz\hat{\mathbf{j}} + yz^2\hat{\mathbf{k}}$  y  $C$  es el camino indicado en la figura a la derecha.

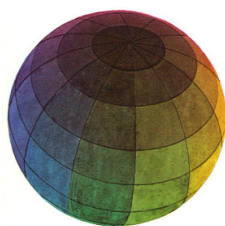


**7.42** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y, yz - x, x + 2y)$ . Calcule la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , donde  $C$  es la curva que se muestra en la figura de la derecha.



**7.43** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z, 2y, y - z)$ . Calcule la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , donde  $C = C_1 + C_2 + C_3$  tal y como se muestra en la figura de la derecha.





Versión actualizada de este libro:  
<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/>

### Apéndice A: Más sobre cónicas

Preliminares: Traslación y rotación de ejes.  
Estudio de la ecuación general.  
Invariantes y clasificación de cónicas.  
Excentricidad: Otra manera de definir las cónicas.  
Ecuación polar de una cónica.  
Reconocimiento de cónicas con métodos matriciales.  
Ecuación paramétrica de una cónica.

### Apéndice B: Coordenadas Polares

Introducción  
Conversión de coordenadas  
Curvas en coordenadas polares  
Graficar en coordenadas polares.  
Simetría  
Máximos, ceros y tangentes al polo.  
Curvas especiales

### Bibliografía

## 8 — Apéndices

### 8.1 Apéndice A: Más sobre cónicas

En esta sección vamos a ver que la manera práctica de identificar la cónica de ecuación (1.2), con todos sus elementos. También vamos ver teoría de *invariantes*. Usando esta teoría podemos identificar la cónica, sin atender a sus elementos, directamente aplicando el siguiente teorema,

#### Teorema 8.1

Consideremos la ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Entonces,

- a) si  $B^2 - 4AC = 0$  y  $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \neq 0$ , tenemos una parábola,
- b) si  $B^2 - 4AC < 0$  y  $(A + C)(4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2) < 0$ , tenemos una elipse,
- c) si  $B^2 - 4AC > 0$  y  $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \neq 0$ , tenemos una hipérbola.

Si definitivamente se sabe que la ecuación general corresponde a una cónica propia, entonces

- a) si  $B^2 - 4AC = 0$ , tenemos una parábola,
- b) si  $B^2 - 4AC < 0$ , tenemos una elipse,
- c) si  $B^2 - 4AC > 0$ , tenemos una hipérbola.

### 8.1.1 Preliminares: Traslación y rotación de ejes.

**Traslación del origen.** Sea  $P$  con coordenadas  $(x, y)$  en el sistema estándar  $XY$ . Nos interesa las coordenadas de  $P$  en un nuevo sistema  $X'Y'$  con ejes paralelos a los ejes  $X$  e  $Y$ . Si el nuevo sistema tiene su origen en el punto  $(h, k)$  (en coordenadas estándar), el punto  $P$  tendrá coordenadas

$$P = (x', y') = (x - h, y - k)$$

en el nuevo sistema. Así, la transformación de coordenadas, para pasar del sistema  $XY$  al sistema  $X'Y'$ , es

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad (8.1)$$

Si aplicamos este cambio de variable a la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

obtenemos

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (D + 2Ah + Bk)x' + (A + Bh + 2Ck)y' + Dh + Ah^2 + Ek + Bhk + Ck^2 + F = 0.$$

**Cónicas centrales.** Para eliminar la traslación en el eje  $X'$  y la traslación en el eje  $Y'$ , debemos tomar  $h$  y  $k$  de tal manera que

$$\begin{cases} D + 2Ah + Bk = 0, \\ A + Bh + 2Ck = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Este sistema tiene solución si  $B^2 - 4AC \neq 0$ . En este caso,

$$\begin{cases} h = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \\ k = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}. \end{cases} \quad (8.3)$$

Así, si  $B^2 - 4AC \neq 0$ , la ecuación general queda reducida a

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + \frac{CD^2 - BDE + AE^2 + B^2F - 4ACF}{B^2 - 4AC} = 0. \quad (8.4)$$

Las cónicas propias para las cuales  $B^2 - 4AC \neq 0$ , se llaman “cónicas centrales”. Como la ecuación reducida (8.4) permanece sin cambios al sustituir  $x$  e  $y$  por  $-x$  y  $-y$ , esta cónica es simétrica respecto al punto  $(h, k)$  definido por las ecuaciones (8.3). Es decir,  $(h, k)$  es el *centro* de esta cónica.

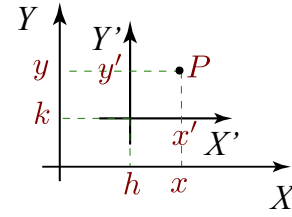


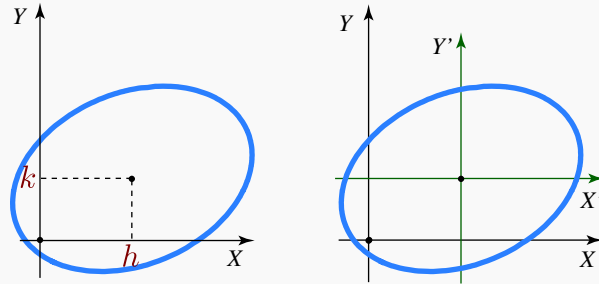
Figura 8.1

**Ejemplo 8.1**

Consideremos la cónica  $3x^2 - 2xy + 5y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$ . Verifique que es una cónica central y calcule su centro  $(h, k)$ . Aplicar el cambio de variable (8.1) para reducir la cónica.

**Solución:** Como  $B^2 - 4AC \neq 0$ , se trata de una cónica central. El centro es, según (8.3),  $(h, k) = (15/7, 10/7)$ . Aplicando el cambio de variable  $x = x' + h$  y  $y = y' + k$ , obtenemos

$$3x'^2 - 2x'y' + 5y'^2 - 153/7 = 0.$$

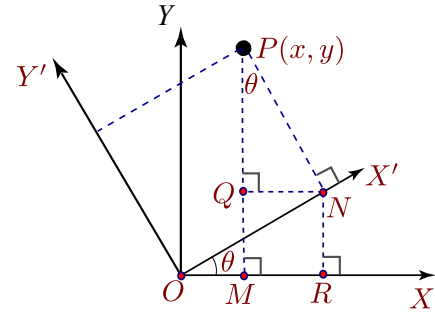


**Rotación alrededor del origen.** Sea  $P$  con coordenadas  $(x, y)$  en el sistema estándar  $XY$ . Nos interesa las coordenadas de  $P$  en un nuevo sistema  $X'Y'$  que corresponden a una rotación, respecto al origen en el sistema  $XY$ . Si el ángulo de rotación es  $\theta$  (contra-reloj), el punto  $P = (x, y)$  tendrá coordenadas

$$(x', y') = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

en el nuevo sistema.

En la figura (8.2) se ve que  $OM = ON \cos \theta - NP \sin \theta$  (¿por qué?) y como  $x' = ON$  y  $y' = NP$ , concluimos entonces que  $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$ . De manera análoga,  $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ .



**Figura 8.2**

La transformación de coordenadas, para pasar del sistema  $XY$  al sistema rotado (en un ángulo  $\theta$  contra-reloj)  $X'Y'$ , es,

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (8.5)$$

En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Al sustituir  $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$  e  $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$  en la ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ,

obtenemos la ecuación

$$A' x'^2 + Bx'y' + C' y'^2 + D' x' + E' y' + F = 0,$$

donde

$$A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta$$

$$B' = B \cos^2 \theta - 2A \sin \theta \cos \theta + 2C \sin \theta \cos \theta - B \sin^2 \theta$$

$$C' = C \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + A \sin^2 \theta$$

$$D' = D \cos \theta + E \sin \theta$$

$$E' = E \cos \theta - D \sin \theta$$

$$F' = F$$

**Eliminar el término “ $xy$ ”.** Aquí es de interés el caso en que tomemos  $\theta$  de tal manera que el coeficiente de “ $xy$ ” se anule. En este caso, nos quedaría una nueva ecuación,

$$A' x'^2 + C' y'^2 + D' x' + E' y' + F = 0.$$

Esto nos dice que si la ecuación  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  corresponde a una cónica propia, este cambio de variable deja la cónica en forma estándar (sin rotación) en el sistema  $X'Y'$ .

Si en la ecuación general,  $B \neq 0$ , podemos usar una rotación para eliminar el término “ $xy$ ”. Al sustituir  $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$  e  $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$  en la ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} & x'^2 (A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta) \\ & + x' y' (B \cos^2 \theta - 2A \sin \theta \cos \theta + 2C \sin \theta \cos \theta - B \sin^2 \theta) \\ & + y'^2 (C \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + A \sin^2 \theta) \\ & + y' (E \cos \theta - D \sin \theta) + x' (D \cos \theta + E \sin \theta) + F = 0 \end{aligned}$$

Necesitamos calcular  $\theta$  de tal manera que su coeficiente  $B \cos^2 \theta - 2A \sin \theta \cos \theta + 2C \sin \theta \cos \theta - B \sin^2 \theta$  se anule,

$$B \cos^2 \theta - 2A \sin \theta \cos \theta + 2C \sin \theta \cos \theta - B \sin^2 \theta = 0 \implies (C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta) = 0.$$



- Si  $A \neq C$ ,  $\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$ . Aquí tomamos la solución  $\theta = \frac{\arctan(B/(A-C))}{2} \in ]-\pi/4, \pi/4[$ .
- Si  $A = C$ , entonces  $B \cos(2\theta) = 0$ . Para eliminar la rotación podemos tomar  $\theta = \pi/4$ .
- Si  $\theta = \alpha$  es el ángulo que anula el coeficiente del término “ $xy$ ”, la ecuación general queda como

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

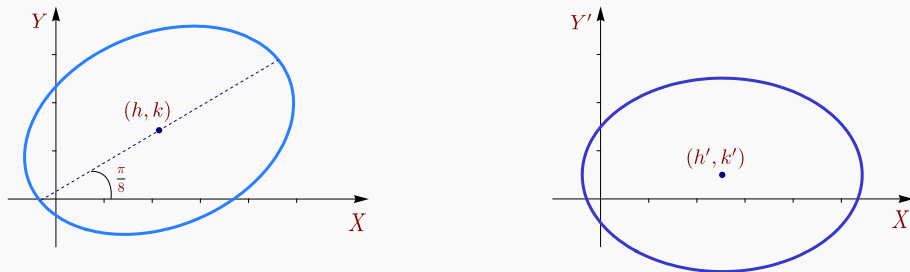
Más adelante haremos referencia al caso particular  $\theta = \pi/2$ , en este caso, el efecto de la transformación es, básicamente, intercambiar  $x$  con  $y$ , es decir, el resultado de aplicar el cambio de variable es

$$Cx^2 - Bxy + Ay^2 + Ex - Dy + F = 0.$$

### Ejemplo 8.2

Consideremos la cónica  $3x^2 - 2xy + 5y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$ . Su centro es, según (8.3),  $(h, k) = (15/7, 10/7)$ . Como  $A = 3 \neq C = 5$ , el ángulo de rotación que anula el coeficiente del término  $xy$  al hacer el cambio de variable (8.5) es  $\theta = \frac{\arctan(-2/(3-5))}{2} = \pi/8$ . Al aplicar el cambio de variable se obtiene la cónica (con coeficientes aproximados)

$$2.585x'^2 + 5.414y'^2 - 13.065x' - 5.411y' - 4 = 0.$$



El centro de la cónica en el sistema  $X'Y'$  es  $(h', k') \approx (2.526, 0.499)$ . Como conocemos el ángulo de rotación, entonces  $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.14286 \\ 1.42857 \end{pmatrix}$  como ya sabíamos.

### 8.1.2 Estudio de la ecuación general.

En el estudio de la ecuación general, empezamos con el caso más sencillo. Necesitamos este caso para reducir los casos más complejos, vía traslación o rotación, a este caso y luego, usando *invariantes*, obtener la clasificación del teorema (8.1).

**Reducción al caso más simple.** Vamos a establecer la reducción de la ecuación general en los casos en que  $B^2 - 4AC$  se anula o no se anula.

Si  $B^2 - 4AC \neq 0$ , la ecuación general se reduce a

$$A'\bar{x}^2 + C'\bar{y}^2 + F' = 0.$$

En efecto, si  $h = (2CD - BE)/(B^2 - 4AC)$  y  $k = (2AE - BD)/(B^2 - 4AC)$ , al aplicar la traslación  $x = x' + h$ ,  $y = y' + k$ , a la ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , obtenemos

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + \frac{CD^2 - BDE + AE^2 + B^2F - 4ACF}{B^2 - 4AC} = 0, \quad (8.6)$$

Ahora, a esta ecuación reducida le aplicamos la rotación  $x'' = x' \cos \theta - y' \sin \theta$  e  $y'' = x' \sin \theta + y' \cos \theta$  con  $\theta$  escogido de tal manera que se elimine el término " $x'y'$ ", obtenemos

$$x''^2 (A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta) + y''^2 (C \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + A \sin^2 \theta) + \frac{CD^2 - BDE + AE^2 + B^2F - 4ACF}{B^2 - 4AC} = 0.$$

O, en forma abreviada,  $A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0$ .

Si  $B^2 - 4AC = 0$ , la ecuación general se reduce a

$$A'x''^2 + E'y' + F' = 0 \quad \text{o} \quad C'y''^2 + D'x' + F' = 0.$$

En efecto, como  $B = \pm 2\sqrt{AC}$ , la ecuación general se reduce a

$$Ax^2 \pm 2\sqrt{AC}xy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Como antes, tomamos  $\theta$  de tal manera que se elimine el término " $xy$ ". La ecuación general se reduce a

$$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \quad \text{o} \quad C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0.$$

Hay dos casos pues  $A' = 0$  o  $C' = 0$ . Para ver esto, observemos que

$$A' = A \cos^2 \theta \pm 2\sqrt{AC} \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta = (\sqrt{A} \cos \theta \pm \sqrt{C} \sin \theta)^2$$

$$C' = C \cos^2 \theta \pm 2\sqrt{AC} \sin \theta \cos \theta + A \sin^2 \theta = (\sqrt{C} \cos \theta \pm \sqrt{A} \sin \theta)^2$$

Uno de estos coeficientes se anula si  $\sqrt{C} \sin \theta = -\sqrt{A} \cos \theta$  o  $\sqrt{A} \sin \theta = \sqrt{C} \cos \theta$ . Si  $A = C$  y  $B = \pm 2\sqrt{AC}$ , obtenemos el resultado. Si  $A \neq C$  y  $B = \pm 2\sqrt{AC}$ , entonces como  $\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{B}{A - C}$  tenemos,

$$\begin{aligned} B \tan^2 \theta + 2(A - C) \tan \theta - B &= 0 \implies \tan \theta = \frac{-2(A - C) \pm \sqrt{4(A - C)^2 + 4B^2}}{2B} \\ &\implies \tan \theta = \pm \frac{A}{\sqrt{AC}} = \pm \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}} \quad (\text{racionalizando con } \sqrt{A}), \\ &\implies \sqrt{C} \sin \theta = -\sqrt{A} \cos \theta \quad \text{o} \quad \sqrt{A} \sin \theta = \sqrt{C} \cos \theta. \end{aligned}$$

Completando cuadrados, estas ecuaciones se reducen a

$$A'x''^2 + E'y' + F' = 0 \quad \text{o} \quad C'y''^2 + D'x' + F' = 0.$$

Así, el estudio de la ecuación general se reduce al estudio de los casos  $A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0$  y  $C'y'^2 + D'x' + F' = 0$  (pues aplicando una rotación de  $\pi/2$ , se intercambia  $x$  con  $y$ ). En lo que sigue, se hace el estudio detallado.

**Estudio de los casos más simples.** El primer caso que analizamos corresponde a la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0. \quad (8.7)$$

Si ninguno de los coeficientes es cero, tenemos

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{C}} = 1. \quad (8.8)$$

De aquí podemos deducir que<sup>1</sup>

- a) Si  $AC > 0$  y  $AF < 0$ , tenemos una elipse.
- b) Si  $AC > 0$  y  $AF > 0$ , no hay lugar geométrico.
- c) Si  $AC < 0$  y  $F < 0$  o  $F > 0$ , tenemos una hipérbola.

En el caso de que algunos coeficientes en  $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$  sean cero, tenemos

- d) Si  $AC > 0$  y  $F = 0$ , tenemos un punto.
- e) Si  $AC < 0$  y  $F = 0$ , tenemos dos rectas que se intersecan.
- f) Si  $AC = 0$  y  $(A + C)F > 0$ , no hay lugar geométrico.
- g) Si  $AC = 0$  y  $(A + C)F < 0$ , tenemos líneas paralelas.
- h) Si  $AC = 0$  y  $F = 0$ , tenemos una línea.

**Ecuaciones sin el término “ $xy$ ”.** En la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (8.9)$$

Si  $A$  ni  $C$  son cero, completando cuadrados tenemos

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F. \quad (8.10)$$

Si hacemos el cambio de variable  $x' = x + \frac{D}{2A}$ ,  $y' = y + \frac{E}{2C}$ , la ecuación (8.9) se convierte en

$$Ax'^2 + Cy'^2 + \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4AC} = 0.$$

Esta ecuación es del mismo tipo que la ecuación (8.8), así que podemos concluir que

<sup>1</sup>Observe que  $AC > 0$  y  $AF < 0$  significa que  $A$  y  $F$  tienen signo contrario y que  $A$  y  $C$  tienen el mismo signo.

- a) si  $AC > 0$  y  $\frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4C} < 0$ , tenemos una elipse,
- b) si  $AC < 0$  y  $\frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4AC} \geq 0$ , tenemos una hipérbola.

Usando la ecuación (8.10) podemos establecer centro, vértices, etc., en términos de los coeficientes  $A, C, D, E$  y  $F$ .

Casos  $A = 0$  ó  $C = 0$ .

Ecuación  $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Si  $A \neq 0$  y  $E \neq 0$ , completando cuadrados en la ecuación, se obtiene la ecuación canónica de la parábola

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y + \frac{F}{E} - \frac{D^2}{4EA}\right)$$

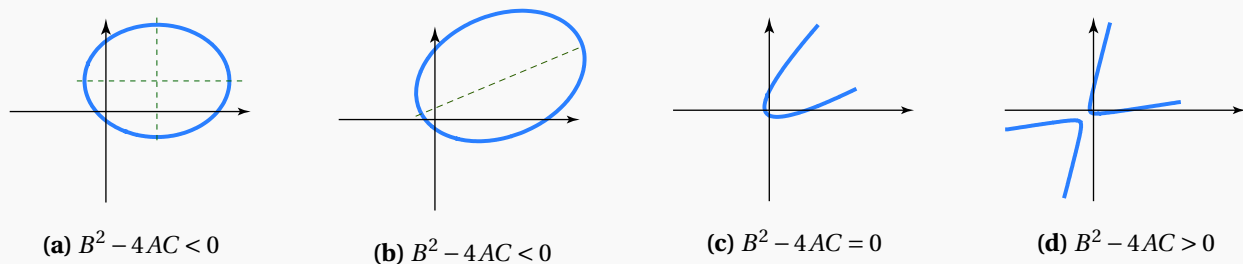
Ecuación  $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Si  $C \neq 0$  y  $D \neq 0$ , completando cuadrados en la ecuación, se obtiene la ecuación canónica de la parábola

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4CD}\right)$$

**Ecuaciones con el término “ $xy$ ”.** Si la ecuación  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  corresponde a una cónica propia, la presencia del término “ $Bxy$ ” indica que la cónica no está en posición estándar sino que presenta una rotación de ángulo  $\theta$ , respecto al origen. El “discriminante”  $B^2 - 4AC$ , si se trata de una cónica no degenerada, indica la naturaleza de la cónica.

### Ejemplo 8.3

Consideremos la cónica (propia)  $3x^2 + 5y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$ . Para tener una primera idea de cómo afecta la aparición del término “ $Bxy$ ”, vamos a agregar a esta ecuación este término de tal manera que  $B^2 - 4AC$  sea negativo, positivo y nulo. Para esto, en la figura (8.3) se muestra la gráfica de las cónicas  $3x^2 + 5y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$ ,  $3x^2 - 2xy + 5y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$ ,  $3x^2 - \sqrt{60}xy + 5y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$  y  $3x^2 - 20xy + 5y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$ , en ese orden.



**Figura 8.3:** En el caso de cónicas propias, el signo de  $B^2 - 4AC$  nos indica que tipo de cónica se trata.

Para estudiar la ecuación general hacemos un cambio de variable para convertir esta ecuación en una del tipo (8.10). La idea del cambio de variable es introducir un nuevo sistema  $X'Y'$  en el que la cónica quede en posición estándar, i.e.,

respecto a este sistema la cónica no presenta rotación.

Si  $\theta = \alpha$  es el ángulo que anula el coeficiente del término “ $xy$ ”, la ecuación general queda como

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

donde

$$A' = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$C' = C \cos^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + A \sin^2 \alpha$$

$$D' = D \cos \alpha + E \sin \alpha$$

$$E' = E \cos \alpha - D \sin \alpha$$

$$F' = F.$$

Como esta ecuación es del tipo (8.10),

a) si  $A'C' > 0$  y  $\frac{4A'C'F' - C'D'^2 - A'E'^2}{4C'} < 0$ , tenemos una elipse,

b) si  $A'C' < 0$  y  $\frac{4A'C'F' - C'D'^2 - A'E'^2}{4A'C'} \geq 0$ , tenemos una hipérbola,

c) si  $C' = 0$ ,  $A' \neq 0$  y  $E' \neq 0$ , tenemos una parábola,

d) si  $A' = 0$ ,  $C' \neq 0$  y  $D' \neq 0$ , tenemos una parábola.

**Centro, focos y vértices de la cónica.** Una vez que hemos eliminado el término “ $xy$ ” de la ecuación general, podemos obtener la ecuación canónica, completando cuadrados. Si en el sistema  $X'Y'$ , el centro (o el vértice) de la cónica es  $(h', k')$ , entonces, en el sistema  $XY$ ,  $(h, k)$  se puede obtener como

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}.$$

Y en general, si  $(x', y')$  es un foco o un vértice de la cónica en el sistema  $X'Y'$ , entonces el respectivo foco o vértice en el sistema  $XY$  sería

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Si  $B^2 - 4AC \neq 0$ , el centro (de la elipse o hipérbola) en el sistema  $XY$  también se puede calcular (como vimos antes)

con la fórmula,

$$h = (2CD - BE)/(B^2 - 4AC), k = (2AE - BD)/(B^2 - 4AC).$$

Si  $B^2 - 4AC = 0$ , se dice que el centro de la cónica está “en el infinito”.

Si ya tenemos la ecuación sin rotación, el resto de la información la calculamos de la manera usual y luego aplicamos una rotación para ubicarla en el sistema  $XY$ .

### Ejemplo 8.4

Identifique la cónica  $3x^2 - 2xy + 5y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$ , determine su ecuación canónica en el sistema  $X'Y'$  y trazar su gráfica.

**Solución:** Primero calculamos el ángulo de rotación

$$\tan(2\alpha) = \frac{B}{A - C} = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/8.$$

La nueva ecuación es

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

donde

$$A' = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha \approx 2.585$$

$$C' = C \cos^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + A \sin^2 \alpha \approx 5.414$$

$$D' = D \cos \alpha + E \sin \alpha \approx -13.065$$

$$E' = E \cos \alpha - D \sin \alpha \approx -5.411$$

$$F' = F = -4.$$

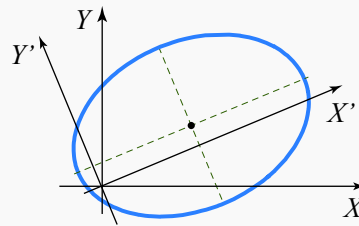
La cónica en el sistema  $X'Y'$  tiene ecuación (con coeficientes aproximados)

$$2.585x'^2 + 5.414y'^2 - 13.065x' - 5.411y' - 4 = 0.$$

Se trata de una elipse con ecuación canónica

$$\frac{(x' - 2.527)^2}{8.456} + \frac{(y' - 0.499)^2}{4.037} = 1.$$

Para hacer la representación gráfica, podemos dibujar los ejes  $X'$ ,  $Y'$  en el sistema estándar (rotando los ejes  $\pi/8$  contra-reloj) y dibujar respecto a estos ejes usando la ecuación canónica.



**Ejemplo 8.5**

Identifique la cónica  $x^2 - 20\sqrt{3}xy + 21y^2 - 6 = 0$ , determine su ecuación canónica en el sistema  $X'Y'$  y trazar su gráfica.

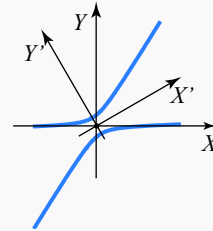
**Solución:** Primero calculamos el ángulo de rotación

$$\tan(2\alpha) = \frac{B}{A-C} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \pi/6$$

La nueva ecuación es

$$-9x'^2 + 31y'^2 + 0 \cdot x' + 0 \cdot y' - 6 = 0.$$

La cónica en el sistema  $X'Y'$  tiene ecuación  $-9x'^2 + 31y'^2 - 6 = 0$ . Se trata de una hipérbola con ecuación canónica  $-\frac{x'^2}{2/3} + \frac{y'^2}{6/31} = 1$ . Para hacer la representación gráfica, podemos dibujar los ejes  $X'$ ,  $Y'$  en el sistema estándar (rotando los ejes  $\pi/6$  contra-reloj) y dibujar respecto a estos ejes, usando la ecuación canónica.

**Ejemplo 8.6**

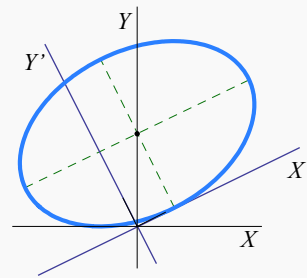
Identifique y haga la representación gráfica de la cónica  $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$ . Determine su centro  $(h, k)$  en el sistema  $XY$ .

**Solución:** Aplicando el cambio de variable nos queda,

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{(x' - 1)^2}{9} + \frac{(y' - 2)^2}{4} = 1.$$

El ángulo de rotación es  $\theta \approx 0.463$ . El centro de la elipse, en el sistema  $X'Y'$  es  $(h', k') = (1, 2)$ , por tanto, en el sistema  $XY$  es

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} = (0, \sqrt{5}).$$

**8.1.3 Invariantes y clasificación de cónicas.**

No es necesario eliminar el término " $xy$ " para clasificar una cónica. Esto se puede determinar con el valor de ciertas combinaciones de coeficientes.

Cuando aplicamos a la ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , el cambio de variable (8.5) obtenemos la

ecuación  $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ , donde

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta \\ C' &= C \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + A \sin^2 \theta \\ D' &= D \cos \theta + E \sin \theta \\ E' &= E \cos \theta - D \sin \theta \\ F' &= F \end{aligned} \quad (8.11)$$

Cuando aplicamos el cambio de variable (8.1), del origen al nuevo origen  $O' = (h, k)$ , la ecuación general queda  $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ , donde

$$\begin{aligned} A' &= A, B' = B, C' = C, \\ D' &= 2Ah + Bk + D, \\ E' &= Bh + 2Ck + E, \\ F' &= Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Se observa entonces que si aplicamos una rotación, el coeficiente  $F$  no varía y si aplicamos una traslación, no varían los coeficientes  $A, B$  y  $C$ . También hay combinaciones de coeficientes que no cambian cuando se aplican combinaciones de estas dos transformaciones de coordenadas. Estas combinaciones se llamamos *invariantes* (respecto a traslación y rotación). Las combinaciones de coeficientes que nos interesan son las que deciden la naturaleza de la cónica, por ejemplo  $B^2 - 4AC$ .

El invariante más simple es la combinación  $\Theta = A + C$ . En efecto, en el caso de una traslación es obvio, según (8.12), que  $A + C = A' + C'$ . En el caso de una rotación, podemos usar (8.21) para establecer que  $A' + C' = (A + C) \cos^2 \theta + (A + C) \sin^2 \theta = A + C$ .

Un segundo invariante es  $\Phi = B^2 - 4AC$ . El valor de  $\Phi$  no cambia si aplicamos una traslación pues no cambian  $A, B$  y  $C$ . Si aplicamos una rotación,

$$A' - C' = (A - C) \cos 2\theta + B \sin 2\theta,$$

y entonces

$$(A' - C')^2 + B'^2 = (A - C)^2 + B^2,$$

Ahora, agregamos  $2AC - 2AC$  en el miembro izquierdo y  $2A'C' - 2A'C'$  en el miembro derecho para obtener

$$(A' + C')^2 - 4A'C' + B'^2 = (A + C)^2 - 4AC + B^2,$$

finalmente, como  $\Theta$  es invariante,

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC.$$

Un tercer invariante es  $\Delta = 4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2$ . La prueba es similar.

Ahora vamos aplicar estos invariantes para identificar cónicas a partir de la ecuación general. Como hemos visto, la ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , se puede reducir a alguna de las formas

$$A'x^2 + C'y^2 + F' = 0, \text{ con } A', C' \text{ no nulos.} \quad (8.13)$$



$$C''y^2 + D''x = 0, \text{ con } C'' \neq 0 \text{ y } D'' \neq 0. \quad (8.14)$$

Es suficiente considerar estos casos porque al aplicar una rotación de  $\pi/2$  se intercambia  $x$  con  $y$  y se obtienen las otras combinaciones.

- Si la ecuación general se reduce a la forma (8.14), entonces  $\Phi = 0$  y  $\Delta = -C''D'' \neq 0$ . Como  $\Phi$  y  $\Delta$  son invariantes, aplicados en la ecuación general, nos dice que si

$$\Phi = B^2 - 4AC = 0 \text{ y } \Delta = 4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \neq 0,$$

entonces tenemos una parábola.

Si la ecuación general se reduce a la forma (8.13), entonces  $\Phi = -4A'C'$  y  $\Delta = 4A'C'F' = -\Phi F'$ .

- Si  $\Phi > 0$ , la ecuación general solo se puede reducir a la forma (8.13) y en este caso  $\Phi = -4A'C' > 0$  nos dice que  $A'$  y  $C'$  tienen signos opuestos y que  $F'$  es cero solo cuando  $\Delta = 0$ . De acuerdo a nuestra caracterización de cónicas en el caso más simple, la ecuación general representa una hipérbola si  $\Phi = B^2 - 4AC > 0$  y  $\Delta \neq 0$ .
- Si  $\Phi < 0$ , la ecuación general solo se puede reducir a la forma (8.13) y en este caso  $\Phi = -4A'C' < 0$  nos dice que  $A'$  y  $C'$  tienen signos iguales y que  $F'$  es cero solo cuando  $\Delta = 0$ . De acuerdo a nuestra caracterización de cónicas en el caso más simple, la ecuación general representa una elipse si  $\Phi = B^2 - 4AC < 0$ ,  $\Delta \neq 0$  y  $F'$  tiene signo opuesto a  $A'$  y  $C'$ . En resumen, si  $\Phi < 0$ , la ecuación general corresponde a una elipse si  $\Phi\Delta < 0$ .

Toda este análisis se resumen en teorema (8.1).

#### 8.1.4 Excentricidad: Otra manera de definir las cónicas.

La parábola, la elipse y la hipérbola se pueden definir en términos de las distancias a un punto fijo y una recta dada. En un plano, consideremos una recta fija  $\ell$  y un punto fijo  $F$ , no contenido en la recta; se llama “cónica” al lugar geométrico de un punto  $Q$  que se mueve en el plano de tal manera que la razón  $\frac{d(Q,F)}{d(Q,\ell)}$  es siempre igual a una constante positiva, denotada con  $e$ . La recta  $\ell$  se llama directriz y el punto  $F$  se llama foco. La constante  $e = \frac{d(Q,F)}{d(Q,\ell)}$  se llama *excentricidad* de la cónica.

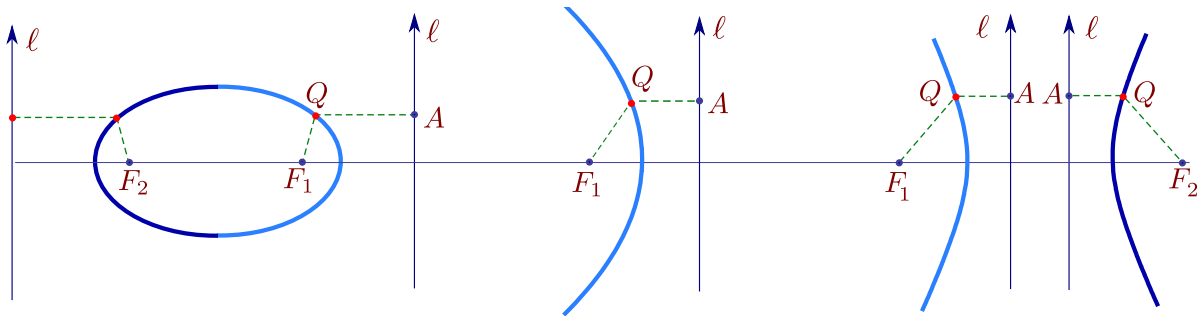


Figura 8.4

Para hacer el análisis sencillo, se puede ubicar la directriz en el eje  $Y$  y se puede tomar el foco en  $F = (s, 0)$ , con  $s > 0$ . Si  $Q = (x, y)$  está en el lugar geométrico, entonces si  $QA$  es el segmento perpendicular al eje  $Y$ , debe cumplir

$$\frac{\overline{QF}}{\overline{QA}} = e,$$

que analíticamente corresponde a

$$\frac{\sqrt{(x-s)^2 + y^2}}{|x|} = e.$$

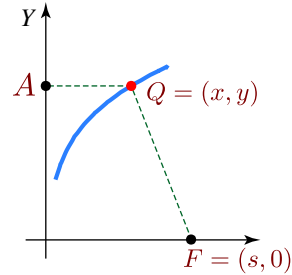


Figura 8.5

Simplificando se obtiene  $(1 - e^2)x^2 - 2sx + y^2 + s^2 = 0$ . Esta ecuación es la ecuación de una cónica, pero su naturaleza depende del valor de  $e$ .

- Si  $e = 1$ , obtenemos la parábola  $y^2 = 2s(x - s/2)$ .
- Si  $e \neq 1$ , podemos dividir por  $1 - e^2$  y completar el cuadrado:

$$\frac{\left(x - \frac{s}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{s^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{s^2 e^2}{1 - e^2}} = 1. \quad (8.15)$$

Por tanto, si  $e > 1$  entonces  $1 - e^2 < 0$ ; y tenemos la hipérbola  $\frac{\left(x - \frac{s}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{s^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{s^2 e^2}{e^2 - 1}} = 1$

con centro  $(h, k) = \left(\frac{s}{1 - e^2}, 0\right)$ ,  $a^2 = \frac{s^2 e^2}{(1 - e^2)^2}$ , y  $b^2 = \frac{s^2 e^2}{e^2 - 1}$ . Como en la hipérbola  $c^2 = a^2 + b^2$ , tenemos en particular,  $e = \frac{c}{a}$ .

- Si  $e < 1$ , entonces  $1 - e^2 > 0$  y la ecuación corresponde a una elipse. De manera análoga, se puede mostrar que  $e = \frac{c}{a}$ .

En resumen, dada una recta  $\ell$  y un punto fijo  $F$  que no está en  $\ell$ , el lugar geométrico de los puntos  $Q$  del plano tales que el cociente de las distancias de  $Q$  a  $F$  y a  $\ell$  es una constante,  $e$ , es

- a) una elipse si  $0 < e < 1$  (una circunferencia si  $e = 0$ ),
- b) una parábola si  $e = 1$  y
- c) una hipérbola si  $e > 1$ .

En general, si  $a$  es la longitud del semieje mayor en la elipse o la longitud del semieje transversal en la hipérbola, en ambos casos, la excentricidad es  $e = c/a$ ;  $c$  se calcula como  $c^2 = a^2 - b^2$  en la elipse y como  $c^2 = a^2 + b^2$  en la hipérbola. En la parábola la excentricidad es siempre  $e = 1$ .

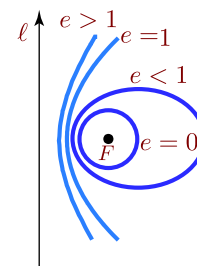


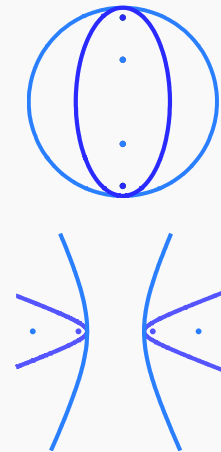
Figura 8.6

### Ejemplo 8.7

En este ejemplo consideramos cónicas con distinta excentricidad.

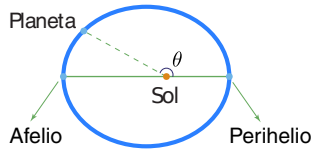
La elipse  $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$  (en celeste) tiene excentricidad  $e = \frac{c}{a} \approx 0.44$  mientras que la elipse  $(x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$  (en violeta) tiene excentricidad  $e = \frac{c}{a} \approx 0.89$ . Como se observa, si la excentricidad es  $\approx 1$ , la elipse se parece a una circunferencia.

La hipérbola  $\frac{(x-2)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$  (en celeste) tiene excentricidad  $e = \frac{c}{a} \approx 1.118$ . La hipérbola  $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{30} = 1$  (en violeta) tiene excentricidad  $e = \frac{c}{a} \approx 2.91$ . Se observa como una excentricidad grande hace que la hipérbola tenga ramas “estrechas”.



#### 8.1.5 Ecuación polar de una cónica.

El matemático y astrónomo J. Kepler (1571-1630), sobre la base de una gran cantidad de datos obtenidos por Tycho Brahe (1546-1601) acerca del movimiento planetario (en particular de Marte), descubrió que la trayectoria de los planetas del sistema solar es elíptica, con el sol en uno de sus focos. En un principio Kepler pensaba que las orbitas debían ser circulares, una idea difícil de desechar dado que la excentricidad de la órbita de Marte es 0.093315 (casi una circunferencial!).



El *Afelio* es el punto más alejado de la órbita de un planeta alrededor del Sol. El *perihelio*, es el punto más cercano al Sol. Si  $a$  es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica y  $e$  la excentricidad, entonces en el afelio, la distancia del planeta al sol es  $r = a(1 + e)$  y en el perihelio la distancia del planeta al sol es  $a(1 - e)$ . Para obtener estas distancias es conveniente expresar la ecuación de una elipse en términos del semieje mayor  $a$  y la excentricidad.

Para simplificar, supongamos que tenemos una cónica  $C$  con excentricidad  $e$ , un foco  $F$  en el origen y una directriz vertical  $\ell$  a una distancia  $d$  a la derecha de  $F$ .

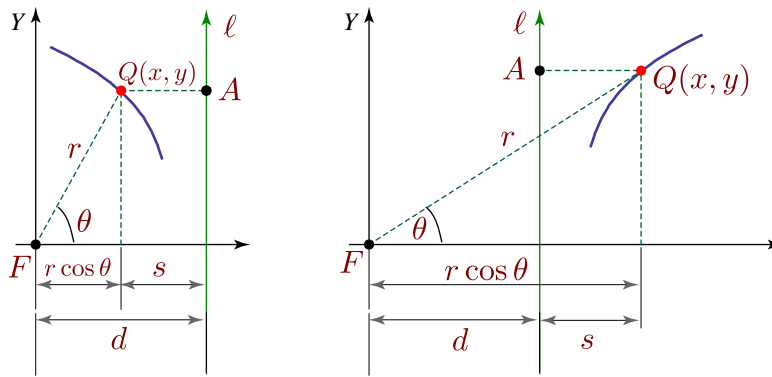


Figura 8.7

Como vimos en la sección anterior, se debe cumplir

$$\frac{\overline{QF}}{\overline{QA}} = e.$$

Si ponemos  $s = \overline{QA}$  y  $r = \overline{QF}$ , entonces  $s = |d - r \cos \theta|$  y  $\frac{r}{|d - r \cos \theta|} = e$ .

- Si  $Q(x, y)$  está a la izquierda de la directriz  $\ell$ , entonces  $s = d - r \cos \theta$ , despejando  $r$  obtenemos

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

- Si  $Q(x, y)$  está a la derecha de la directriz  $\ell$ , entonces  $s = r \cos \theta - d$ , despejando  $r$  obtenemos

$$r = \frac{ed}{e \cos \theta - 1}$$

En este caso, como  $r > 0$ ,  $e > 0$  y  $d > 0$ , se cumple  $e \cos \theta > 1$  por lo que  $e > 1$ . Esto dice que solo las hipérbolas tienen puntos a la derecha de la directriz  $\ell$ .

En resumen,

**Teorema 8.2**

Sea  $C$  una cónica con excentricidad  $e$ , un foco  $F$  en el origen y una directriz vertical  $\ell$  a una distancia  $d$  a la derecha de  $F$ . Si  $0 < e \leq 1$ , la cónica  $C$  es una elipse o una parábola; todo punto de  $C$  está a la izquierda de  $\ell$  y satisface la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \quad (8.16)$$

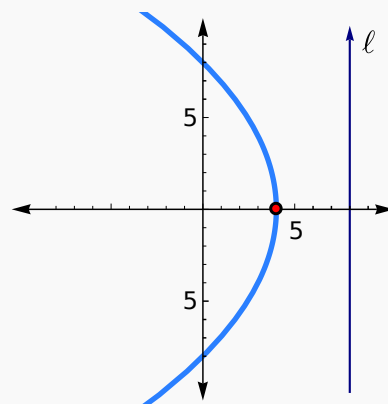
Si  $e > 1$ , la curva es una hipérbola con una rama a cada lado de  $\ell$ . Los puntos de la rama de la izquierda satisfacen la ecuación (8.16) y los de la rama de la derecha satisfacen

$$r = \frac{ed}{e \cos \theta - 1} \quad (8.17)$$

**Ejemplo 8.8**

Considere la cónica con ecuación polar  $r = \frac{8}{1 + \cos \theta}$ .

Como  $e = 1$ , se trata de una parábola. El foco está, por supuesto, en el origen. La directriz está a la derecha del foco y tiene ecuación  $x = 8$ . El vértice es  $V = (4, 0)$ .



En *Wolfram Mathematica* se puede hacer la representación gráfica usando `PolarPlot`. El código del ejemplo anterior es,

```
PolarPlot[ 8/(1+Cos[t]),{t,0,2Pi},
PlotRange->{{-10,10},{-10,10}},
AxesStyle->Arrowheads[{-0.05,0.05}]
];
```

**Afelio y Perihelio.** La ecuación de una elipse ( $0 < e < 1$ ) con foco en el origen es  $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ . Para calcular la distancia al sol en el Perihelio hacemos  $\theta = 0$ , es decir,  $r = \frac{ed}{1 + e}$ . Para calcular la distancia al sol en el Afelio hacemos  $\theta = \pi$ , es decir,  $r = \frac{ed}{1 - e}$ . Como la suma de ambas distancias es  $2a$ , entonces  $2a = \frac{ed}{1 + e} + \frac{ed}{1 - e} \Rightarrow a = \frac{ed}{(1 + e)(1 - e)}$ . Así,  $r = \frac{ed}{1 + e} = a(1 - e)$  y  $r = \frac{ed}{1 - e} = a(1 + e)$ .

### 8.1.6 Reconocimiento de cónicas con métodos matriciales.

La ecuación general  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  se puede escribir en términos matriciales como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0, \quad (8.18)$$

o, como  $X^T AX + KX + F = 0$  con  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$  y  $K = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix}$ .

Si  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$  es una matriz que diagonaliza ortogonalmente a  $A$ , tal que  $\text{Det}(P) = 1$ , entonces el cambio de variable  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  provoca una rotación. Sustituyendo  $X = PX'$  en la ecuación (8.18),

$$(PX')^T A(PX') + K(PX') + F = 0 \iff X'^T (P^T AP) X' + K(PX') + F = 0.$$

Como  $P$  diagonaliza a  $A$ , entonces

$$(P^T AP) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son valores propios de  $A$ . Entonces,  $X'^T (P^T AP) X' + K(PX') + F = 0$  es equivalente a

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0, \quad (8.19)$$

o

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0. \quad (8.20)$$

Como se ve, se eliminó el término “ $xy$ ” y la cónica se puede reconocer fácilmente.

**Cálculo de la matriz  $P$ .** Primero hay que calcular una *base ortonormal* para cada espacio propio asociado a cada valor propio  $\lambda_i$ . En nuestro caso, cada espacio propio tiene una base ortonormal con un solo vector unitario.

Ahora debemos colocar estos vectores base como columnas de la matriz  $P$  de tal manera que  $|P| = 1$ .

Si  $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$  con  $|P| = 1$ , los vectores unitarios  $v_1$  y  $v_2$ , generan los nuevos ejes  $X'Y'$ . El ángulo de rotación es  $\theta = \angle e_1, v_1$  con  $e_1 = (0, 1)$ .

**Ejemplo 8.9**

Identifique y haga la representación gráfica de la cónica  $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$ .

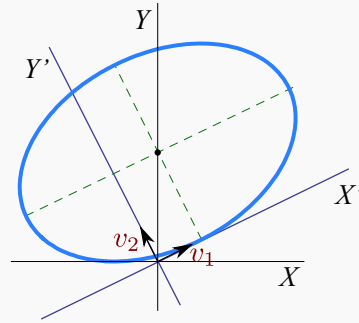
**Solución:** La forma matricial de la cónica es

$$X^T A X + K X + F = 0$$

con  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$  y  $K = \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} \\ -16\sqrt{5} \end{pmatrix}$ .

La ecuación característica de  $A$  es

$$|\lambda I - A| = \text{Det} \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{pmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 4).$$



La base ortonormalizada para el espacio propio asociado a  $\lambda_1 = 4$  es  $v_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

La base ortonormalizada para el espacio propio asociado a  $\lambda_2 = 9$  es  $v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ .

La matriz  $P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$  tiene determinante igual a 1. Ahora, haciendo el cambio de variable  $X = P X'$  nos queda,

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{(x' - 1)^2}{9} + \frac{(y' - 2)^2}{4} = 1.$$

El ángulo de rotación es  $\theta = \arccos((1, 0) \cdot v_1) / \|(1, 0)\| \|v_1\| = \arccos(2/\sqrt{5}) \approx 0.463$ . El centro de la elipse, en el sistema  $X'Y'$  es  $(h', k') = (1, 2)$ , por tanto, en el sistema  $XY$  es  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$ , i.e.,  $(h, k) = (0, \sqrt{5})$ .

**8.1.7 Ecuación paramétrica de una cónica.**

Una parametrización de una curva  $C$  es una función  $r(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , con  $x(t)$  y  $y(t)$  funciones continuas en  $[a, b]$ . Las parametrizaciones es lo que más usado en gráficos por computadora y modelado geométrico ya que los puntos de la curva se calculan fácilmente. En contraste, la evaluación de los puntos de una curva definida implícitamente (como es el caso de las cónicas) es mucho más difícil.

En esta sección vamos a establecer una parametrización para la cónica propia de ecuación general  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Hay varias maneras de hacer esto. Aquí vamos a usar la teoría que hemos desarrollado previamente, usando algunas parametrizaciones conocidas para los casos simples. No vamos a ver cómo se obtiene una parametrización. Para esto puede ver ([?]). En principio, podemos usar el teorema (8.1) para identificar la cónica, luego la llevamos a la forma estándar. En esta forma es fácil definir la parametrización.

**Parábola.** La parábola  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  se puede parametrizar como

$$\begin{cases} x(t) = h + pt^2, \\ y(t) = k + 2pt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para parametrizar  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , recordemos que esta ecuación corresponde a una parábola si  $B^2 - 4AC = 0$  y  $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \neq 0$ . Aplicamos una rotación de ángulo  $\theta = \arctan(B/(A - C))$  si  $A \neq C$ , en otro caso,  $\theta = \pi/4$ . La ecuación se reduce a

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta, \\ C' &= C \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + A \sin^2 \theta, \\ D' &= D \cos \theta + E \sin \theta, \\ E' &= E \cos \theta - D \sin \theta, \\ F' &= F. \end{aligned} \quad (8.21)$$

En este caso  $A' = 0$  o  $C' = 0$ . En resumen, la ecuación se reduce a

$$A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0 \quad \text{o} \quad C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0.$$

Una vez que tenemos la ecuación así, ya podemos completar cuadrados y aplicar la parametrización. Para obtener una representación gráfica simétrica se puede usar  $t \in [-s, s]$ ,  $s > 0$ .

**Estudio del caso**  $C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$ . La ecuación canónica en el sistema  $X'Y'$  es

$$(y' + E'/2C')^2 = -\frac{D'}{C'}(x' + F/D' - E'^2/4C'D').$$

Por lo tanto,  $h = (E'^2 - 4C'F)/4C'D'$ ,  $k = -E'/2C'$  y  $p = -D'/4C'$ . La parametrización en el sistema  $X'Y'$  es

$$\begin{cases} x'(t) = h + pt^2, \\ y'(t) = k + 2pt, \end{cases} \quad t \in [-s, s], \quad s > 0.$$

y la parametrización en el sistema  $XY$  es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

donde  $\theta$  es el ángulo de rotación.

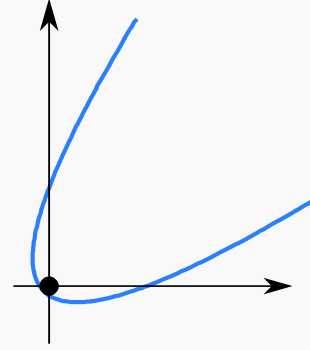


**Ejemplo 8.10**

Parametrizar la cónica  $3x^2 - \sqrt{36}xy + 3y^2 - 10x - 10y - 4 = 0$ .

**Solución:** Como  $B^2 - 4AC = 0$  y  $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = -1200 \neq 0$ , se trata de una parábola. Como  $A = C$  el ángulo es  $\theta = \pi/4$ . Al aplicar la rotación nos queda la ecuación

$$6y^2 - 10\sqrt{2}x - 4 = 0.$$



Entonces  $h = -\sqrt{2}/5$ ,  $k = 0$  y  $p = 5/(6\sqrt{2})$ . Por lo tanto, la parametrización en el sistema  $XY$  es

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{60}(-12 - 50t + 25t^2), \\ y(t) = \frac{1}{60}(-12 + 50t + 25t^2), \end{cases} \quad t \in [-s, s], \quad s > 0.$$

El estudio del caso  $A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$  queda como ejercicio.

**La elipse.** Si la ecuación canónica de la elipse es  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ , una parametrización es

$$\begin{cases} x(t) = h + a \cos t, \\ y(t) = k + b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

En particular, la circunferencia  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  se parametriza como

$$\begin{cases} x(t) = h + r \cos t, \\ y(t) = k + r \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  es la ecuación de una elipse, al aplicar una rotación que elimine el término “ $xy$ ”, obtenemos

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$$

Completando cuadrados nos queda

$$\frac{(x' - h)^2}{F'/A'} + \frac{(y' - k)^2}{F'/C'} = 1,$$

donde  $h = -D'/2A'$ ,  $k = -E'/2C'$ ,  $F' = -F + D'^2/4A' + E'^2/4C'$ . Esta información es suficiente para parametrizar la elipse con  $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$  en el sistema  $X'Y'$ . La parametrización  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  en el sistema  $XY$  se obtiene con

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

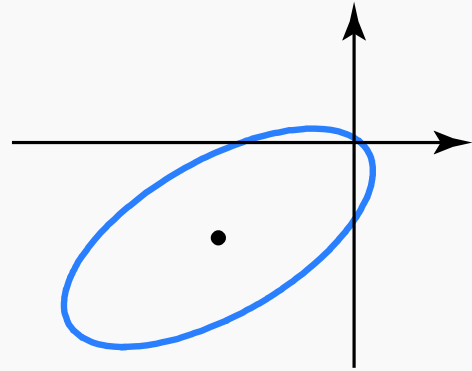
donde  $\theta$  es el ángulo de rotación.

### Ejemplo 8.11

Parametrizar la cónica  $2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 4y^2 + 5x + 6y - 1 = 0$ .

**Solución:** Como  $B^2 - 4AC = -20 < 0$  y  $(A + C)(4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2) = 6(-192 - 60\sqrt{3}) < 0$ , se trata de una elipse. El ángulo de rotación es  $\theta = \pi/6$ . Al aplicar la rotación nos queda la ecuación

$$x^2 + \left(3 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)x + 5y^2 + \left(-\frac{5}{2} + 3\sqrt{3}\right)y - 1 = 0.$$



Entonces  $h = -3.66506$ ,  $k = -0.269615$ ,  $a = 3.84658$  y  $b = 1.72024$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3.66506 + 3.84658 \cos t \\ y'(t) &= -0.269615 + 1.72024 \sin t. \end{aligned}$$

La parametrización en el sistema  $XY$  es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.03923 + 3.33123 \cos t - 0.860121 \sin t \\ -2.06603 + 1.92329 \cos t + 1.48977 \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

El centro de la elipse, en  $XY$ , es  $(-3.03923, -2.06603)$ .

**La Hipérbola.** Si la ecuación canónica de la hipérbola es  $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ , una parametrización es

$$\begin{cases} x(t) = h + a \cosh t, \\ y(t) = k + b \sinh t, \end{cases} \quad t \in [-s, s], \quad s > 0.$$

Esta parametrización solo es para la rama derecha de la hipérbola. La rama de la izquierda la obtenemos por reflexión sobre el eje  $x = h$ , es decir,

$$\begin{cases} x(t) = 2h - (h + a \cosh t), \\ y(t) = k + b \sinh t, \end{cases} \quad t \in [-s, s], \quad s > 0.$$

Si  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  corresponde a una hipérbola (i.e. si  $B^2 - 4AC < 0$  y  $B^2 - 4AC > 0$  y  $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \neq 0$ ), eliminamos el término “ $xy$ ” y obtenemos la forma reducida  $A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F = 0$ . Completando cuadrados obtenemos  $h$ ,  $k$ ,  $a$  y  $b$  pero respecto al sistema  $X'Y'$ . Si  $(x'(t), y'(t))$  es la parametrización en el sistema  $X'Y'$ , la representación gráfica de la cónica en el sistema  $XY$  la podemos hacer con la parametrización

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

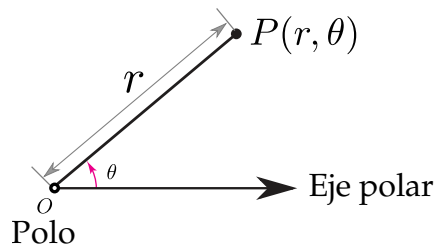
donde  $\theta$  es el ángulo de rotación. El estudio completo queda como ejercicio.

## 8.2 Apéndice B: Coordenadas Polares

### 8.2.1 introducción

Las coordenadas de un punto en el plano también se pueden establecer fijando un punto  $O$ , llamado **polo** u **origen** y construyendo un eje con punto inicial  $O$ . Este eje lo llamamos **Eje Polar**. Este nuevo sistema de coordenadas se llama “sistema de coordenadas polares”.

A cada punto  $P$  en el plano se le pueden asignar las coordenadas  $(r, \theta)$  (llamadas *coordenadas polares del punto*) de la manera que se indica en la figura que sigue,



**Figura 8.8:** Coordenadas polares de  $P$ .

- $r$  es la distancia de  $O$  a  $P$ . Más adelante la tomaremos como una “distancia dirigida”, es decir, el signo “-” invierte la dirección.
- $\theta$  es el ángulo desde el Eje Polar hasta el segmento  $\overline{OP}$

#### Ejemplo 8.12

- El punto  $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$  está a 2 unidades del polo. El ángulo desde el Eje Polar hasta  $\overline{OP}$  es  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .
- El punto  $Q\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$  está a 3 unidades del polo. El ángulo desde el Eje Polar hasta  $\overline{OQ}$  es  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ .

c.) El punto  $R\left(3, \frac{11\pi}{6}\right)$  está a 3 unidades del polo. El ángulo desde el Eje Polar hasta  $\overline{OR}$  es  $\theta = \frac{11\pi}{6}$ .

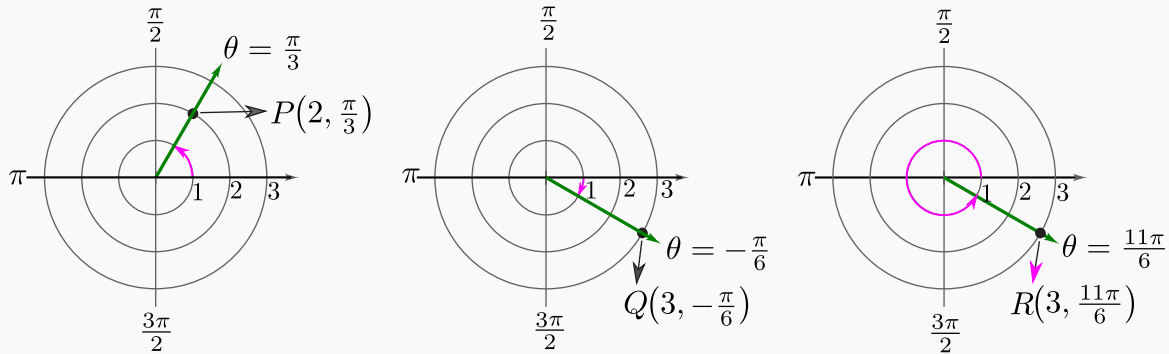


Figura 8.9: Puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .

### Ejemplo 8.13 ( $r$ como “distancia dirigida”)

a.) El punto  $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$  está a 2 unidades del polo. El ángulo desde el Eje Polar hasta  $\overline{OP}$  es  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

b.) El punto  $Q\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$  está a 2 unidades del polo pero en dirección opuesta a  $P$ . El ángulo desde el Eje Polar hasta  $\overline{OP}$  es  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

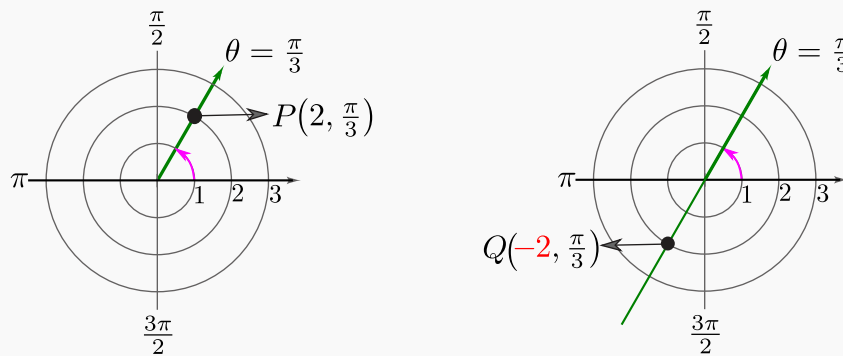


Figura 8.10:  $r$  como “distancia dirigida”

c.) El punto  $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$  también se puede representar como  $P\left(2, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$  y como  $P\left(-2, \frac{\pi}{3} + \pi\right)$

**No unicidad.** A diferencia de las coordenadas rectangulares de un punto, en coordenadas polares la representación no es única:  $P(r, \theta)$  también se puede representar como  $P(r, \theta \pm 2k\pi)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Además como  $r$  la tomamos como una *distancia dirigida*, entonces  $P(r, \theta)$  también se puede representar como

$P(-r, \theta \pm (2k+1)\pi)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Adicionalmente, el polo se puede representar con  $O(0, \theta)$  con  $\theta \in \mathbb{R}$ .

## 35

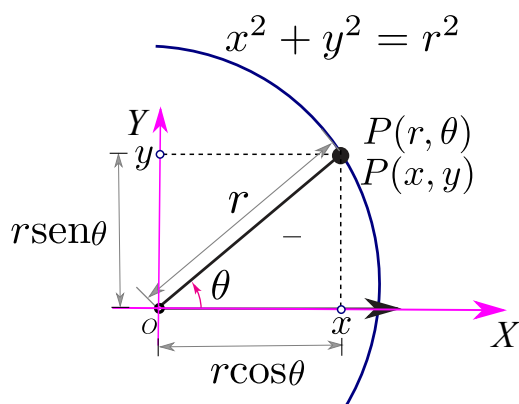
## Ejercicios

**8.1** Represente, en un sistema de coordenadas polares, los siguientes puntos,

- a.)  $(2, \pi)$
- b.)  $(-2, \pi)$
- c.)  $(3, \pi/4)$
- d.)  $(3, 9\pi/4)$
- e.)  $(-3, 5\pi/4)$

### 8.2.2 Conversión de coordenadas

Para empezar podemos establecer una relación inicial entre la coordenada  $(r, \theta)$  de un punto  $P$  y sus respectivas coordenadas cartesianas. La relación se puede ver usando una figura,



**Figura 8.11:** Conversión de coordenadas

**Conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares.** Deducimos que si tenemos las coordenadas polares  $(r, \theta)$  de un punto  $P$ , entonces las coordenadas cartesianas de  $P$  son  $(x, y)$  con

$$(r, \theta) \longleftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

**Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.** Si tenemos las coordenadas  $(x, y)$  de un punto  $P$ , podemos determinar un juego de coordenadas polares con  $r \geq 0$  y  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .

Este intervalo  $]-\pi, \pi]$  es conveniente pues la función "arctan" usualmente la tomamos como la inversa de la función tangente en este intervalo. A la función arcotangente hay que hacerle algunos ajustes dependiendo del cuadrante en el que se encuentre el punto  $(x, y)$ .

$$(x, y) \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ y } y = 0 \text{ (convenio)} \end{cases} \end{cases}$$

#### Ejemplo 8.14 (Conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares)

- a.) Consideremos el punto  $P(\sqrt{3}, \pi/3)$ . Para hacer la conversión a coordenadas rectangulares, usamos la fórmula que establecimos más arriba.

$$(\sqrt{3}, \pi/3) \longleftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \sqrt{3} \sin \pi/3 = \frac{3}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

- b.) Consideremos el punto  $P(-\sqrt{3}, \pi/3)$ . Para hacer la conversión a coordenadas rectangulares, usamos la fórmula que establecimos más arriba.

$$(-\sqrt{3}, \pi/3) \longleftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \cos \pi/3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\sqrt{3} \sin \pi/3 = -\frac{3}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

**Ejemplo 8.15** (Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares)

- a.) Consideremos el punto  $P(-1, 1)$ . Para hacer la conversión a coordenadas polares, usamos la fórmula que establecimos más arriba. Observemos que  $P(-1, 1)$  está en **II cuadrante**.

$$(-1, 1) \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \longleftrightarrow \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

- b.) Consideremos el punto  $P(0, 2)$ . Para hacer la conversión a coordenadas polares, usamos la fórmula que establecimos más arriba. Observemos que  $P(0, 2)$  está en el eje  $Y$ .

$$(0, 2) \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \longleftrightarrow \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$$

**36****Ejercicios**

**8.2** Haga la conversión a coordenadas cartesianas de los siguientes puntos,

- a.)  $(1, \pi)$
- b.)  $(-1, \pi)$
- c.)  $(2, \pi/3)$
- d.)  $(-2, \pi/3)$

**8.3** Haga una conversión a coordenadas polares de los siguientes puntos,

- a.)  $(0, -5)$
- b.)  $(-5, 0)$
- c.)  $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
- d.)  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
- e.)  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

### 8.2.3 Curvas en coordenadas polares

Observemos que si tenemos una curva de ecuación  $y = x^2$ , entonces haciendo la conversión a coordenadas polares (sin considerar el punto  $(0,0)$ ), tendríamos

$$y = x^2$$

$$r \operatorname{sen} \theta = (r \cos \theta)^2$$

$$r \operatorname{sen} \theta = r^2 \cos^2 \theta$$

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} = r \quad \text{o también} \quad r = \sec \theta \tan \theta.$$

Algunas curvas son más sencillas de ver y manipular en coordenadas polares. Por ejemplo, la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  en coordenadas polares es la función constante  $r = a$ .

#### Ejemplo 8.16 (Ecuación polares de una curva)

a.) Obtener una ecuación en coordenadas polares de la curva  $(x^2 + y^2)^3 = 2^5 x$ .

**Solución:** Sustituyendo,

$$(x^2 + y^2)^3 = 2^5 x$$

$$(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^3 = 2^5 r \cos \theta$$

$$(r^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta))^3 = 2^5 r \cos \theta$$

$$r^6 = 2^5 r \cos \theta$$

$$r = 2\sqrt[5]{\cos \theta}$$

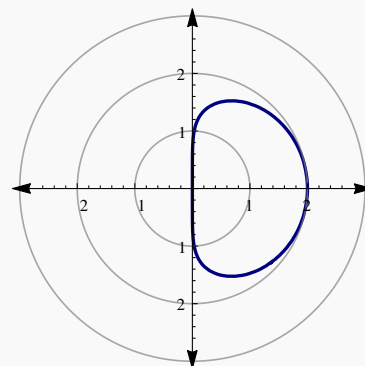


Figura 8.12: Curva  $(x^2 + y^2)^3 = 2^5 x$ .

#### Ejemplo 8.17 (Circunferencias y rayos)

a.) Las circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  tiene ecuación polar  $r = a$  (función constante).



En efecto, sustituyendo obtenemos

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2$$

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = a^2$$

$$r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2$$

$$r = a$$

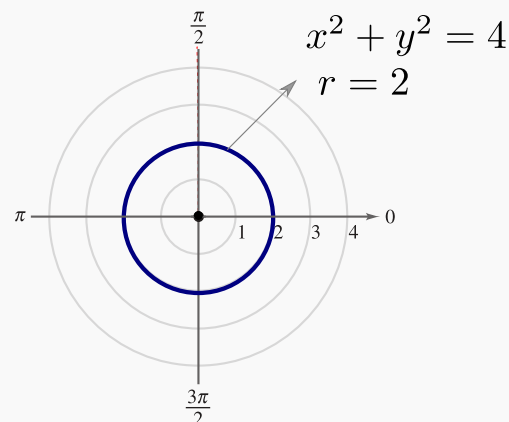


Figura 8.13: Circunferencia  $r = 2$

b.) La recta de ecuación  $y = mx$  (una recta que pasa por el origen) tiene ecuación  $\theta = \arctan(m)$

En efecto, sustituyendo obtenemos

$$y = mx$$

$$r \sin \theta = m r \cos \theta$$

$$\tan \theta = m$$

$$\theta = \arctan(m)$$

Por ejemplo, la recta  $y = \sqrt{3}x$  tiene ecuación en polares

$$\theta = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

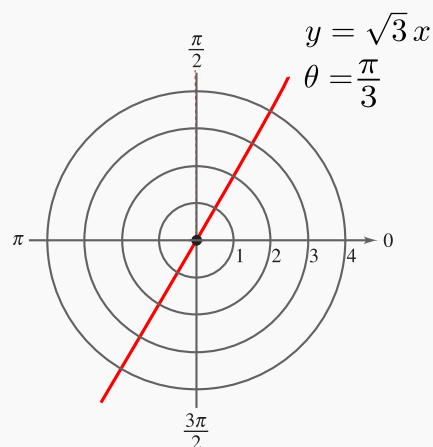


Figura 8.14: Recta  $\theta = \frac{\pi}{3}$

## 37

## Ejercicios

8.4 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva  $(x^2 + y^2)^3 = x^3$ .

8.5 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva  $y = x$

8.6 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva  $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

8.7 Obtener una ecuación en coordenadas polares para la curva  $x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} + x$

### 8.2.4 Graficar en coordenadas polares.

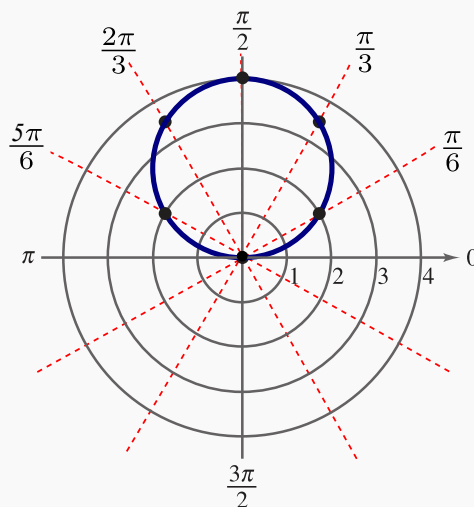
En general, en este curso, nos interesan curvas de ecuación  $r = g(\theta)$ . La manera de hacer la representación gráfica de curvas sencillas es (por ahora) representar algunos puntos de la curva y usar propiedades de simetría para completar el gráfico.

#### Ejemplo 8.18

Realizar el gráfico de la función  $r = 4 \sin \theta$

**Solución:** Hacemos una tabla de valores para esta función tomando valores de  $\theta$  en  $[0, 2\pi]$ .

$\theta$	$r$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{\pi}{3}$	$2\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	4
$\frac{2\pi}{3}$	$2\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	2
$\pi$	0
$\frac{7\pi}{6}$	-2
$\frac{3\pi}{2}$	-4



**Figura 8.15:** Gráfica de  $r = 4 \sin \theta$

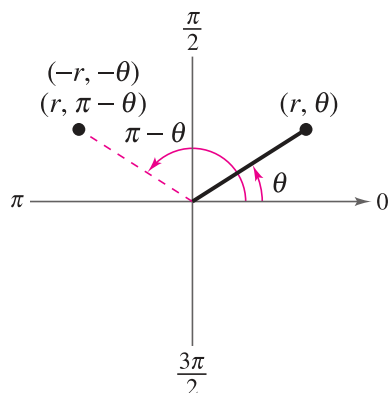
### 8.2.5 Simetría

En el ejemplo 8.18 podemos notar que la gráfica presenta simetría respecto al eje  $Y$ . Haber notado esto nos hubiera permitido conocer propiedades de simetría de la gráfica.

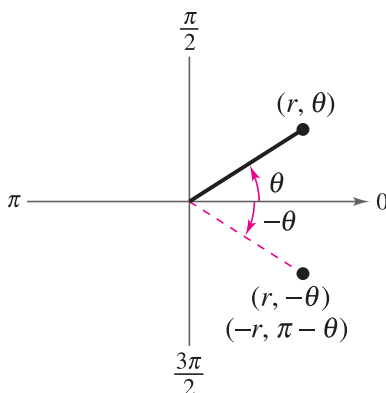
Hay una manera de verificar si una curva presenta simetría respecto a la línea  $\theta = \pi/2$ , respecto al Eje Polar y respecto al Polo.

Estas pruebas de simetría solo dan “condiciones suficientes”, es decir, si la prueba de simetría falla, podría ser todavía que la curva presente simetría. Esto es así porque como las coordenadas en polares no son únicas, las curvas pueden tener ecuaciones alternativas. En algunas de estas ecuaciones las pruebas de simetría funcionan, en otras no.

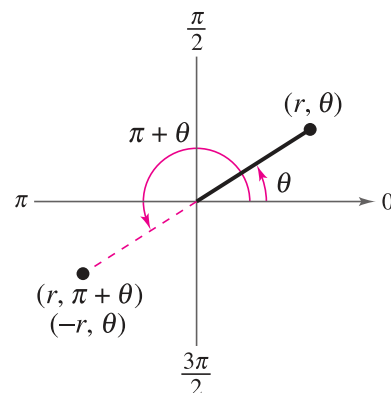
**Pruebas de simetría.** En este curso solo consideramos tres pruebas de simetría.



(a) Simetría respecto a la recta  $\theta = \pi/2$



(b) Simetría respecto al Eje Polar



(c) Simetría respecto al Polo

**(Pruebas de simetría: Suficientes pero no necesarias)**

Prueba de simetría

Aplicar a  $r = f(\theta)$  y simplificar

Simetría respecto a la recta  $\theta = \pi/2$

$$r = f(\pi - \theta) \quad \text{o} \quad -r = f(-\theta)$$

Simetría respecto al Eje Polar

$$r = f(-\theta) \quad \text{o} \quad -r = f(\pi - \theta)$$

Simetría respecto al Polo

$$r = f(\pi + \theta) \quad \text{o} \quad -r = f(\theta)$$

Para aplicar las pruebas de simetría es útil recordar que

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \\ \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \\ \cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta) \\ \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta) \end{array} \right.$$

**Ejemplo 8.19**

Aplicar las pruebas de simetría la curva de ecuación  $r = 3 + 2 \cos \theta$ .

**Solución:**

a.) Simetría respecto a la recta  $\theta = \pi/2$ : La prueba no dice nada.

$r = 3 + 2 \cos \theta$ . Primera sustitución:  $r = 3 + 2 \cos(\pi - \theta) = 3 - 2 \cos \theta$ , falla!

$r = 3 + 2 \cos \theta$ . Segunda sustitución:  $-r = 3 + 2 \cos(-\theta) \Rightarrow r = -3 - 2 \cos \theta$ , falla!

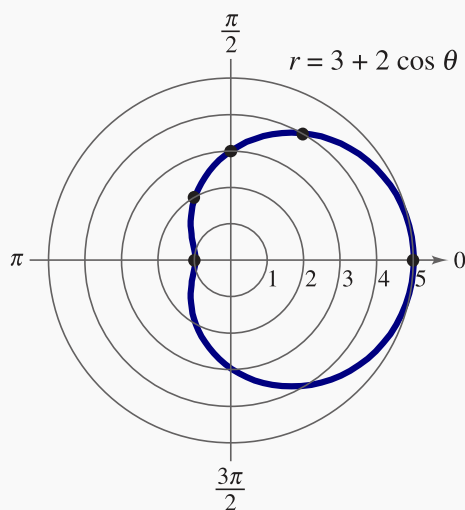
b.) Simetría respecto al Eje Polar: Sí hay simetría.

$r = 3 + 2 \cos \theta$ . Primera sustitución:  $r = 3 + 2 \cos(-\theta) = 3 + 2 \cos \theta$  ✓

c.) Simetría respecto al Polo: La prueba no dice nada.

$r = 3 + 2 \cos \theta$ . Primera sustitución:  $r = 3 + 2 \cos(\pi + \theta) = 3 - 2 \cos \theta$ , falla!

$r = 3 + 2 \cos \theta$ . Segunda sustitución:  $-r = 3 + 2 \cos \theta \Rightarrow r = -3 - 2 \cos \theta$ , falla!



**Figura 8.16:** La curva  $r = 3 + 2 \cos \theta$  presenta simetría respecto al Polo

**Prueba rápida de simetría**

a.) Las curvas de ecuación  $r = f(\sin \theta)$  son simétricas respecto a la línea  $\theta = \frac{\pi}{2}$

b.) Las curvas de ecuación  $r = f(\cos \theta)$  son simétricas respecto al Eje Polar

## 38

## Ejercicios

- 8.8** Verifique que la curva  $r = 1 - 2 \cos \theta$  es simétrica respecto al Polo
- 8.9** Aplicar las pruebas de simetría a la curva de ecuación  $r = 2 \cos 3\theta$ .
- 8.10** Aplicar las pruebas de simetría a la curva de ecuación  $r^2 = a^2 \cos 3\theta$  con  $a$  constante no nula.
- 8.11** Aplicar las pruebas de simetría a la curva de ecuación  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  con  $a$  constante no nula.
- 8.12** Aplicar las pruebas de simetría a la curva de ecuación  $r = 3 \cos 2\theta$  con  $a$  constante no nula.

### 8.2.6 Máximos, ceros y tangentes al polo.

Una ayuda adicional para realizar el gráfico de una curva con ecuación en coordenadas polares, es conocer los ángulos para los que  $|r|$  es máximo y para los cuales  $r = 0$  y adicionalmente conocer las *tangentes al polo*.

**Máximo valor de  $|r|$ .** Para curvas sencillas podemos obtener el valor máximo de  $|r|$  *por inspección*, usando el hecho de que  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  y  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ .

Adicionalmente podríamos aplicar cálculo: Los puntos críticos los obtenemos resolviendo la ecuación  $\frac{dr}{d\theta} = 0$ .

**Ceros.** Resolvemos la ecuación trigonométrica  $f(\theta) = 0$

**Tangentes al Polo.** Sea  $C$  una curva de ecuación  $r = f(\theta)$  con  $f$  una función derivable. Si la gráfica de  $C$  pasa por el Polo cuando  $\theta = \alpha$  entonces  $f(\alpha) = 0$ .

Supongamos que cuando  $\theta = \alpha$ , también tenemos una tangente no horizontal a  $C$  en el Polo, es decir,  $f'(\alpha) \neq 0$ . La ecuación de esta recta tangente es  $y = mx$  con  $m = \tan \alpha$  (pues pasa por el origen). Esto es así porque como

$$\begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta \\ y &= f(\theta) \sin \theta \end{aligned}$$

Entonces, las pendientes de las tangentes vienen dadas por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} \quad (\text{cuidado: La pendiente de la tangente no es } f'(\theta))$$

Así, evaluando en  $\theta = \alpha$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\alpha} = \frac{f'(\alpha) \operatorname{sen} \alpha + f(\alpha) \cos \alpha}{f'(\alpha) \cos \alpha - f(\alpha) \operatorname{sen} \alpha} = \tan \alpha \quad \text{si } f(\alpha) = 0 \text{ y } f'(\alpha) \neq 0.$$

### Tangentes y Tangentes al Polo

- La línea  $\theta = \alpha$  es una *tangente al polo* en la gráfica de la curva  $C$  si  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) \neq 0$
- La línea  $\theta = \alpha$  es una *tangente al polo vertical*, en la gráfica de la curva  $C$ , si  $f(\alpha) = 0$  y  $\left| \frac{dy}{dx} \right| \rightarrow \infty$  si  $\theta \rightarrow \alpha$
- La línea  $\theta = \alpha$  es una *tangente al polo horizontal*, en la gráfica de la curva  $C$ , si  $f(\alpha) = 0$  y  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,\alpha)} = 0$ .
- También puede pasar que la derivada solo exista como un límite unilateral o que  $dy/dx$  se tenga que calcular como una forma indeterminada en el caso de que  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) = 0$ .

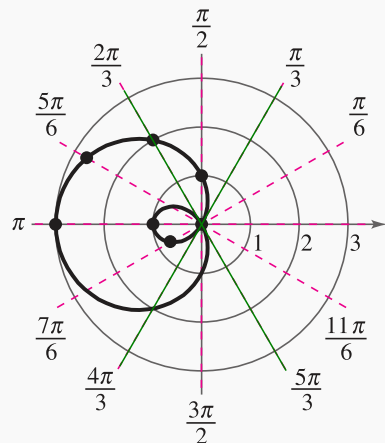
### Ejemplo 8.20

Realizar el gráfico de la curva de ecuación  $r = 1 - 2 \cos \theta$ .

**Solución:** Para realizar la gráfica vamos a aplicar las pruebas de simetría, vamos a calcular los valores máximos, los ceros y las tangentes al polo. Finalmente haremos una tabla de valores.

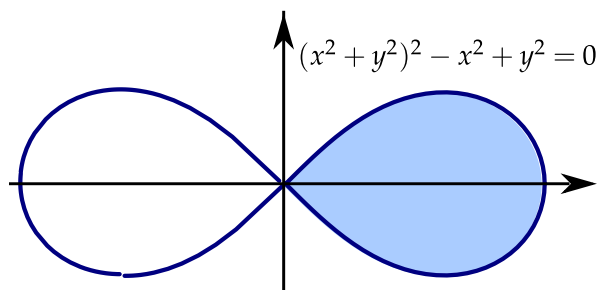
- Simetría:** La curva es simétrica respecto al Eje Polar.
- El valor máximo de  $|r|$ :** Por inspección: Como  $2 \geq -2 \cos \theta \geq -2$ , entonces el valor máximo es  $|r| = 3$  cuando  $\theta = \pi$
- Ceros en  $[0, 2\pi]$ :**  $1 - 2 \cos \theta = 0 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \pi/3 \text{ y } \theta = 5\pi/3$ .
- Tangentes al Polo en  $[0, 2\pi]$ :** La función se anula en  $\alpha = \pi/3, 5\pi/3$ . Como  $r'(\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta$  y como  $r'(\pi/3) \neq 0$  y  $r'(5\pi/3) \neq 0$ , entonces las rectas  $\theta = \pi/3$  y  $\theta = 5\pi/3$  son dos tangentes al Polo.
- Tabla de valores y gráfico**

$\theta$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi$
$r$	-1	$\approx -0.73$	0	1	2	3



**Figura 8.17:** Curva de ecuación  $r = 1 - 2 \cos \theta$ .

**Nota sobre tangentes al Polo.** Si  $f'$  no está definida en el cero  $\theta = \alpha$  entonces no se pueden definir tangentes al Polo para este valor del ángulo. Por ejemplo, la curva de ecuación  $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$  tiene ceros en  $\theta = \pm\pi/4$  pero su derivada  $r'(\theta) = \frac{-\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$  está definida solo si  $\cos(2\theta) > 0$ , es decir, esta función *no tiene* tangentes al Polo en  $\theta = \pm\pi/4$ .



**Figura 8.18:** Las rectas  $\theta = \pm\pi/4$  *no son* tangentes al Polo.

Las rectas  $\theta = \pm\pi/4$  son “tangentes en el límite”, pues como

$$x = r(\theta) \cos \theta$$

$$y = r(\theta) \sin \theta$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta} = \frac{\frac{-\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \sin \theta + \sqrt{\cos(2\theta)} \cos \theta}{\frac{-\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \cos \theta - \sqrt{\cos(2\theta)} \sin \theta} \rightarrow 1 \text{ si } \theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+$$

## 39

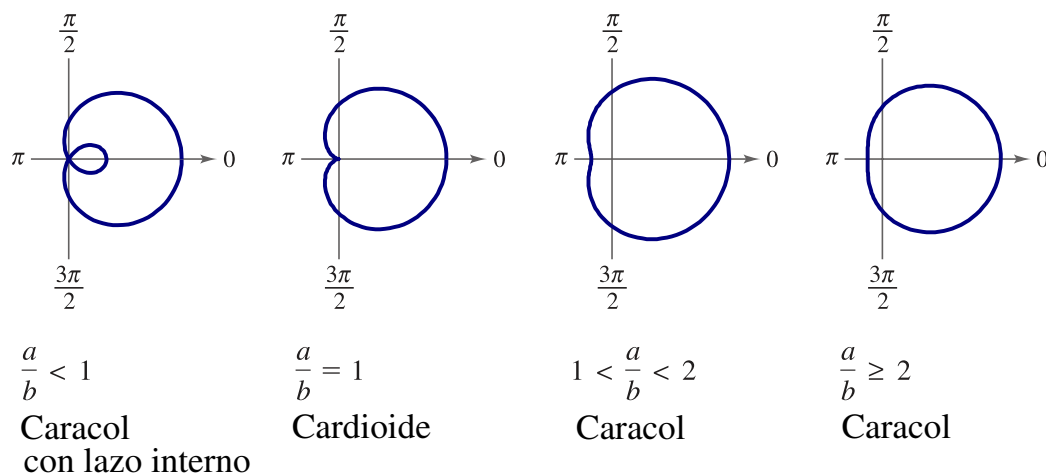
## Ejercicios

**8.13** Realizar el gráfico de las curvas cuya ecuación se indica en la lista que sigue. Usar simetría, ceros, valores máximo de  $|r|$ , tangentes al Polo y una tabla de valores.

- a.)  $r = 2$
- b.)  $\theta = 3\pi/4$
- c.)  $r = 3\cos\theta$
- d.)  $r = 3\sin\theta$
- e.)  $r = 2 + 3\cos\theta$
- f.)  $r = 2 - 3\cos\theta$
- g.)  $r = 4\cos 2\theta$
- h.)  $r = 4\sin 2\theta$

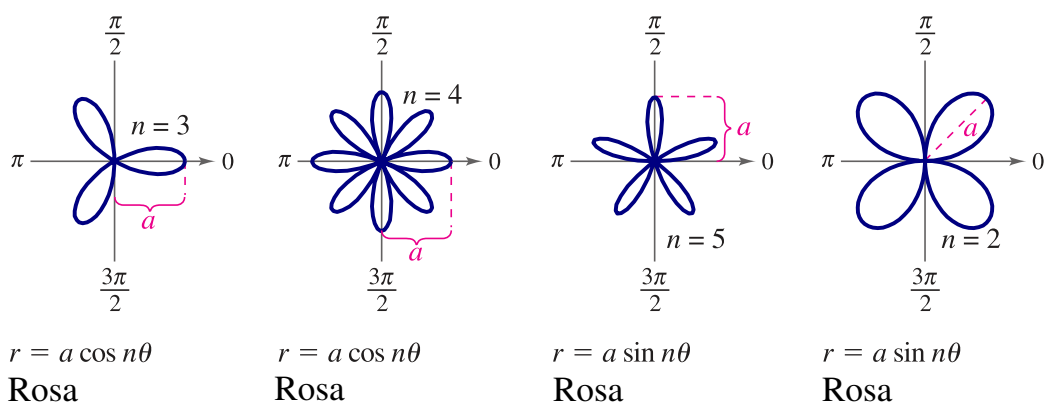
## 8.2.7 Curvas especiales

Hay muchas curvas importantes que tienen una ecuación simple en coordenadas polares. A continuación hacemos un resumen de algunas de estas curvas.

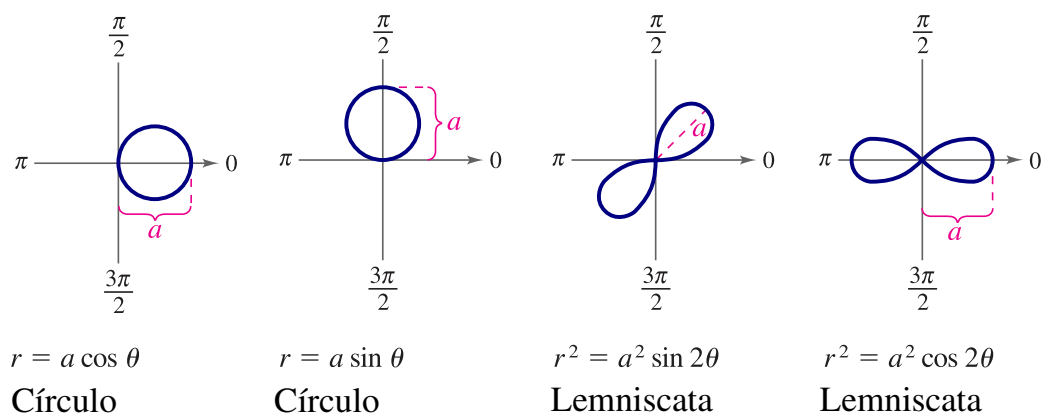


**Figura 8.19:** Caracoles  $r = a \pm \cos\theta$ ,  $r = a \pm \sin\theta$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

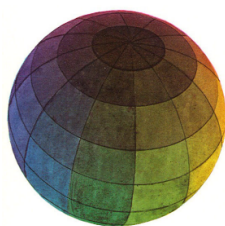




**Figura 8.20:** Rosas de  $n$  pétalos si  $n$  es impar y de  $2n$  pétalos si  $n$  es par



**Figura 8.21:** Círculos y Lemniscatas



Versión actualizada de este libro:  
<https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/>



## Bibliografía

- [1] James J. Callahan. *Advanced Calculus. A Geometric View*. Springer. 1st Edition. 2010.
- [2] Serge Lang. *Calculus of Several Variables*. Addison-Wesley. 1973.
- [3] Klaus Weltner, Wolfgang J. Weber, Jean Grosjean y Peter Schuster. *Mathematics for Physicists and Engineers*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009.
- [4] Wilfred Kaplan. *Advanced Calculus*. Pearson; 5 edition. 2002.
- [5] Sadri Hassani. *Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields*. Springer. 2009.
- [6] Andrew Pressley. *Elementary Differential Geometry*. 2nd edition. Springer-Verlag London Limited. 2010.
- [7] B. Kusse.; E. Westwing. *Mathematical Physics. Applied Mathematics for Scientists and Engineers*. 2nd Edition. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. 2006.
- [8] Claudio Pita R. *Cálculo Vectorial*. Prentice-Hall. 1995.
- [9] Louis Brand. *Advanced Calculus. An Introduction to Classical Analysis*. Wiley & Sons, Inc. 1995.
- [10] Tom Apostol. *Calculus*. Wiley. 1967
- [11] J.M. Aarts. “*Plane and Solid Geometry*.” Springer. 2007.
- [12] A. Chiang. “*Métodos Fundamentales de Economía Matemática*”. McGraw-Hill. 1987
- [13] J. L. Coolidge. “*A history of the conic sections and quadric surfaces*”. Dover publications, Inc. 1968.
- [14] E. Dowling. “*Matemáticas Para Economistas*”. McGraw-Hill. 1982
- [15] H. Eves. “*An introduction to the history of mathematics*”. Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1969.
- [16] Jerrold Marsden, Anthony Tromba. *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley, 2004.

- [17] M. Minoux. "*Mathematical Programing*". Wiley & Sons. New York. 1986
- [18] Walter Mora F. "Gráficos 3D interactivos con Mathematica y LiveGraphics3D ". Revista digital Matemática, Educación e Intenet (<http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>). Volumen 6, número 2. 2005.
- [19] Jorge Poltronieri. *Cálculo Integral: Integración Múltiple*. Editorial Cimpa. 1ra ed. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. 2006.
- [20] Jorge Poltronieri. "*Cálculo Integral: Integración de Línea y Superficie*". Editorial Cimpa. 1ra ed. Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. 2006.
- [21] Sherman Stein. "*Cálculo con Geometría Analítica*". McGraw-Hill. 1984.
- [22] Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye. "*A Course in Multivariable Calculus and Analysis*". Springer. 2009
- [23] J. Vergara, "*Programación Matemática y Cálculo Económico*". Ed. Vicens-vives. España. 1975.



## 9 — Soluciones de los ejercicios

### Soluciones del Capítulo 1

**1.1 a.)**  $(y-2)^2 = (x-2)$

**b.)**  $(x-2)^2 = 4y$

**1.2** Se trata de una parábola con foco en  $(2,3)$  y directriz con ecuación  $x = 4$ . Por lo tanto, la parábola tiene vértice en  $(3,3)$  y abre hacia la izquierda. Su ecuación es  $(y-3)^2 = -4(x-3)$ .

**1.3**

**a.)**  $2x^2 - 4x + 1 = y \Rightarrow 2(x-1)^2 = y+1 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2}(y+1)$ .

**b.)**  $y^2 = -\frac{8}{9}(x + \frac{3}{8})$

**c.)**  $(y+1)^2 = 4(x+2)$

**d.)**  $(x+1)^2 = 2(y-2)$

**e.)**  $x^2 = (y-2)$

**1.4** El vértice es  $(h, k) = (1, 3)$ . Por la posición del foco se deduce que el eje es paralelo al eje  $X$  y la parábola abre hacia la derecha. Entonces la ecuación canónica es  $(y-3)^2 = 4p(x-1)$ . Como  $p = \|(2,3) - (1,3)\| = 1$ , la ecuación canónica es  $(y-3)^2 = 4(x-1)$ .

**1.5** La ecuación canónica es de la forma  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ . Como contiene los tres puntos, entonces

$$\begin{cases} (0 - k)^2 = 4p(0 - h) \\ (2 - k)^2 = 4p(-1 - h) \\ (-2 - k)^2 = 4p(-2 - h) \end{cases} \Rightarrow h = \frac{1}{24}, p = -\frac{2}{3} \text{ y } k = \frac{1}{3}$$

Por tanto, la parábola es  $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 4 \cdot -\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{24}\right)$

**1.6** Como  $(h, k) = (-1, 1)$  y  $p = 1$ , entonces  $(x + 1)^2 = 4(y - 1)$ .

**1.7** La ecuación es  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  y abre a la izquierda. El vértice es  $(h, k) = (5, 4)$  y  $p = -2$ . Entonces la ecuación canónica es  $(y - 4)^2 = -8(x - 5)$ .

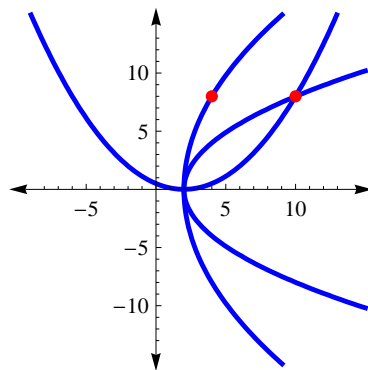
**1.8**  $(x - 2)^2 = 2(y - 3)$ .

**1.9** El vértice es  $(h, k) = (2, 0)$ . Como  $b > 2$ , la parábola solo podría abrir hacia arriba o hacia la derecha.

- Si abre hacia arriba, la ecuación canónica es  $(x - 2)^2 = 4py$ . En este caso, como  $8 + p = 10 \Rightarrow p = 2$  y entonces  $b = 10$ . En este caso tenemos la parábola  $(x - 2)^2 = 8y$ .
- Si abre hacia la derecha, la ecuación canónica es  $y^2 = 4p(x - 2)$ . En este caso, como la directriz tiene ecuación  $x = 2 - p$ , tenemos

$$\begin{cases} b - (2 - p) = 10 \\ 64 = 4p(b - 2) \end{cases} \Rightarrow p = 8; b = 4 \text{ o } p = 2; b = 10.$$

Las tres parábolas son  $(x - 2)^2 = 8y$ ;  $y^2 = 32(x - 2)$  y  $y^2 = 8(x - 2)$ .



**1.10**  $\frac{(x+1)^2}{1/4} + \frac{(y-5/4)^2}{1} = 1.$

**1.11**

**a.)**  $\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(x+2)^2}{\frac{6}{5}} = 1$

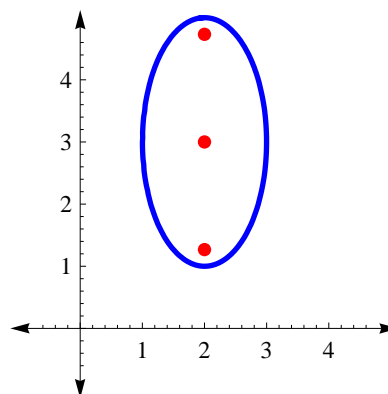
b.)  $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

c.)  $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

d.)  $x^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$

**1.12** La ecuación canónica la obtenemos completando cuadrados.

- Ecuación canónica:  $\frac{(y-3)^2}{4} + \frac{(x-2)^2}{1} = 1$ .
- Centro:  $(h, k) = (2, 3)$
- $a^2 = 4$ ,  $b^2 = 1$  y  $c = \sqrt{3}$
- Focos:  $(2, 3 \pm \sqrt{3})$
- No hay intersección con ejes.

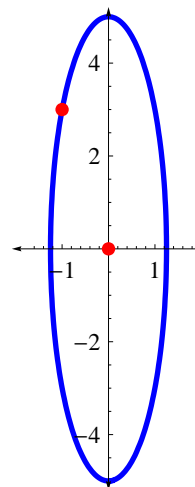


**1.13** Los datos los podemos representar en la figura de la derecha.

Como el centro es  $(h, k) = (0, 0)$ , entonces la ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Esto es así pues el vértice  $(0, 5)$  nos indica que el eje mayor está (en este caso) sobre el eje  $Y$ .



Ahora, como  $(0, 5)$  es un vértice y el centro está en  $(0, 0)$ , se sigue que  $a = 5$  y

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Por otra parte, como  $(-1, 3)$  está en la elipse

$$\frac{(-1)^2}{b^2} + \frac{3^2}{25} = 1$$

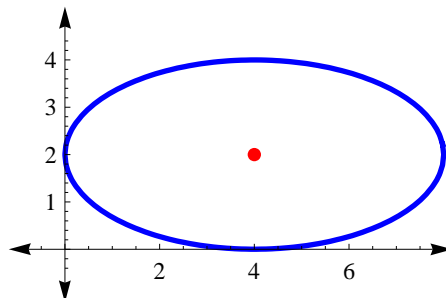
de aquí, despejando, obtenemos  $b^2 = \frac{25}{16}$ . Finalmente, la ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}} + \frac{y^2}{25} = 1$$

**1.14** La elipse se puede ver en la figura de la derecha.

Como la elipse es tangente a los ejes en el primer cuadrante, el otro vértice debe ser  $(0, 2)$  (su eje mayor no puede ser paralelo al eje  $Y$  pues su semieje menor sería de 8 unidades y el mayor de 1 unidad!). Luego,  $(h, k) = (4, 2)$ ,  $a = 4$  y  $b = 2$ . La ecuación canónica es

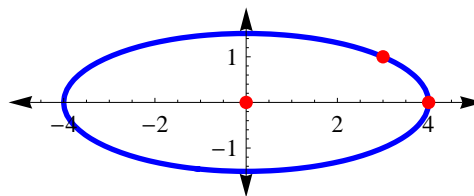
$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$



**1.15** La elipse se puede ver en la figura de la derecha. Según los datos,  $(h, k) = (0, 0)$  y  $(4, 0)$  es el vértice de la derecha, entonces  $a = 4$  y  $(3, 1)$  satisface la ecuación de la elipse:

$\frac{3^2}{16} + \frac{1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{16}{7}$ . La ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{7}} = 1.$$



- Centro:  $(h, k) = (0, 0)$ ,
- $c = \sqrt{\frac{96}{7}}$ ,
- focos:  $(0 \pm \sqrt{\frac{96}{7}}, 0)$ ,
- vértices:  $(4, 0)$  y  $(-4, 0)$ .

**1.16**  $(x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$

- Centro:  $(h, k) = (2, 1)$ ,
- $c = \sqrt{8}$ ,
- focos:  $(2, 1 \pm \sqrt{8})$
- vértices:  $(2, 1 \pm 3)$ .

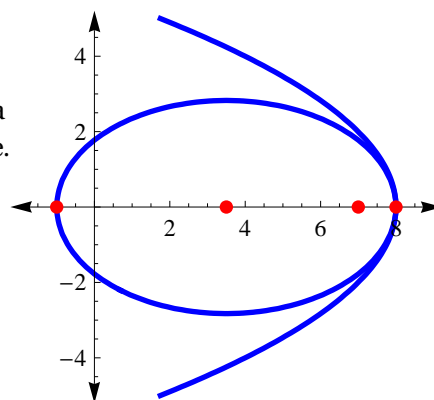
**1.17** La elipse se puede ver en la figura de la derecha.



La ecuación canónica de la parábola es  $y^2 = -4(x - 8)$ . De esta ecuación se obtiene el otro foco y un vértice derecho de la elipse.

La ecuación canónica es

$$\frac{(x - 3.5)^2}{4.5^2} + \frac{y^2}{8} = 1.$$



- Centro:  $(h, k) = (3.5, 0)$ ,
- $c = 3.5$ ,
- focos:  $(0, 0)$  y  $(7, 0)$ ,
- vértices:  $(-1, 0)$  y  $(8, 0)$ .

**1.18** La ecuación canónica es  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{55} = 1$ .

- Centro:  $(h, k) = (0, 0)$ ,
- $c = 3$ ,
- focos:  $(\pm 3, 0)$ ,
- vértices:  $(\pm 8, 0)$ .

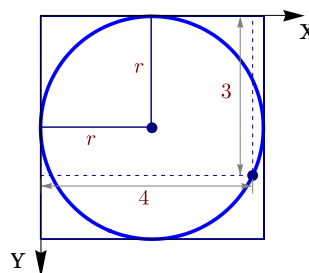
**1.19** La ecuación canónica es  $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ . Por lo tanto es una elipse.

- Centro:  $(h, k) = (2, -3)$ ,
- $c = \sqrt{7}$ ,
- focos:  $(2, -3 \pm \sqrt{7})$ ,
- vértices:  $(2, -3 \pm 4)$ .

**1.20** Si consideramos los lados del cuadrado como ejes coordenados, el círculo inscrito es un círculo con centro en  $(r, r)$  y  $(x, y) = (3, 4)$  es un punto en la circunferencia.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2, \\ (3 - r)^2 + (4 - r)^2 &= r^2, \\ r &= 7 - 2\sqrt{6} \approx 2.1 \\ r &= 7 + 2\sqrt{6} \approx 11.8 \end{aligned}$$



Como  $r < 4$  entonces  $r = 7 - 2\sqrt{6}$ .

**1.21** De la información que nos dan deducimos:

- El foco de la parábola  $(x - 2)^2 = -4(y - 6)$  es  $V_1 = (2, 6 - 1) = (2, 5)$  pues  $p = -1$ .
- El centro de la hipérbola  $(x - 2)^2 - (y - 1)^2 = 1$  es  $V_2 = (2, 1)$ .

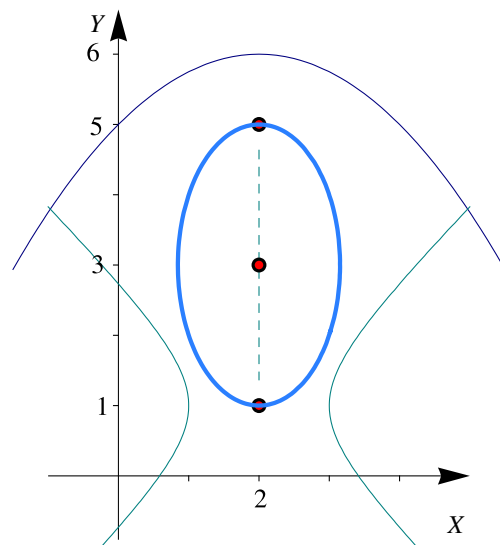
- Los vértices nos indican que la elipse tiene centro en  $(h, k) = (2, 3)$  y su ecuación canónica es

$$\frac{(x-2)^2}{b^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1.$$

- Como la elipse contiene el punto  $(1, 2)$ ,

$$\frac{(1-2)^2}{b^2} + \frac{(2-3)^2}{2^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}.$$

La ecuación canónica de la elipse es  $\frac{(x-2)^2}{\frac{4}{3}} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$ .



**1.22** a.)  $C$  es una parábola de ecuación canónica

$$(x-2)^2 = -8(y+1).$$

b.) Centro de la elipse  $(2, -1)$

c.)  $d(F_1, F_2) = 4 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$

d.)  $d(F_1, V_1) = 3 \Rightarrow a - c = 3 \Rightarrow a = 5$

e.)  $b^2 = 21$

f.) Ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{(x-2)^2}{21} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

g.) Vértices  $(2, 4)$ ,  $(2, -6)$ .

h.) Focos  $(2, 1)$ ,  $(2, -3)$ .

**1.23** La ecuación canónica es

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{8} = 1.$$

**1.24** La ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Como  $c = 10$ , los focos son  $(\pm 10, 0)$  y los vértices son  $(\pm 8, 0)$ . La ecuación de las asíntotas es  $3x - 4y = 0$  y  $3x + 4y = 0$ .

**1.25** La ecuación canónica es  $\frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{7} = 1$ .

**1.26** El centro es  $(-4, 1)$ .  $a = 6$  y  $b = 4$ . La ecuación canónica es  $\frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ .

**1.27** La ecuación canónica es  $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ . Vértices en  $(-3, 2)$ ,  $(5, -2)$  y focos en  $(-4, -2)$ ,  $(6, -2)$ . Las asíntotas son  $y = \pm \frac{3}{4}(x-1) - 2$ .

**1.28** La ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Como  $c = \sqrt{13}$ , los focos son  $(3 \pm \sqrt{13}, 2)$  y los vértices son  $(3 \pm 3, 2)$ .

**1.29** Como  $\sqrt{3} \cdot 4 > 6$ , la asíntota  $y = \sqrt{3}x$  va por arriba del punto  $(4, 6)$ . Esto nos dice que la ecuación de la hipérbola es  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Como  $(4, 6)$  está en la hipérbola y como  $b^2 = 3a^2$ , entonces  $\frac{16}{a^2} - \frac{36}{3a^2} = 1 \Rightarrow a = 4$ . Así, la ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

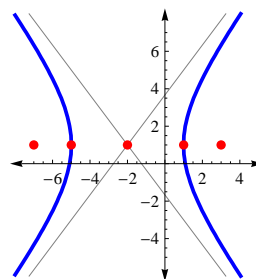
**1.30** La ecuación canónica es  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ .

**1.31** La parábola tiene ecuación canónica  $(y-1)^2 = -8(x+2)$ , por tanto el centro de la hipérbola es  $(-2, 1)$ .

Como un foco está en  $(3, 1)$  y un vértice está en  $(1, 1)$ , el eje transversal es paralelo al eje  $X$ ,  $a = 3$ ,  $c = 5$  y  $b = 4$ . La ecuación canónica es

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

Sus focos son  $(3, 1)$ ,  $(-7, 1)$  y sus vértices  $(1, 1)$ ,  $(-5, 1)$ . Las asíntotas son  $y = \pm \frac{4}{3}(x+2) + 1$ . La hipérbola interseca al eje  $X$  en  $x \approx -5.093$  y  $x \approx 1.0933$ .



**1.32**

**a.)** Como  $k > 0$  y  $k - 16 > 0$ , se trata de una elipse.

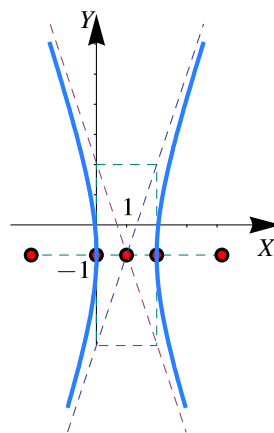
**b.)** Como  $k > 0$  y  $k - 16 < 0$ , se trata de una hipérbola.

**c.)** Como  $k < 0$  y  $k - 16 < 0$ , la ecuación no tiene solución, es decir, no es la ecuación de una curva.

**1.33** Se trata de una hipérbola.

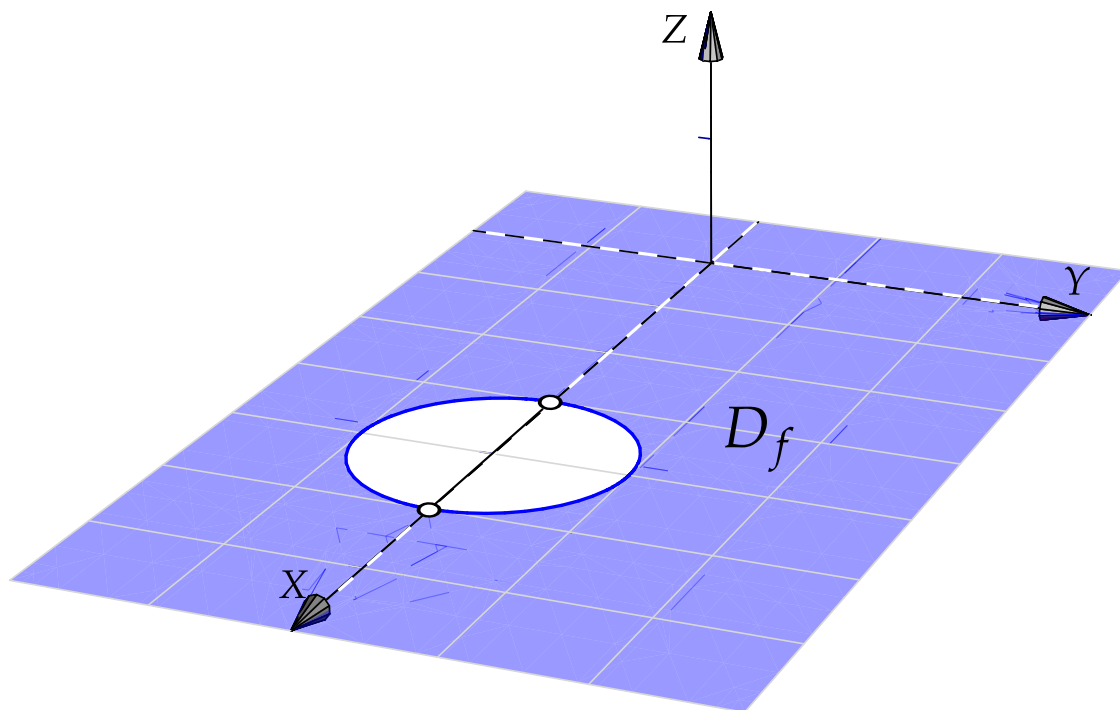
La ecuación canónica es  $(x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ .

- Centro  $(1, -1)$ ,
- $a^2 = 1$  y  $b^2 = 9$ ,
- $c^2 = 1 + 9 \Rightarrow c = \sqrt{10}$ ,
- Focos  $(1 \pm \sqrt{10}, -1)$ .
- Asíntotas:  $y = \pm \frac{3}{1}(x-1) - 1$ .



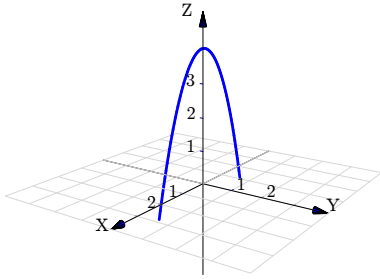
## Soluciones del Capítulo 2

**2.1**  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x-4)^2 + y^2 \geq 1 \text{ y } x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\}$  Este dominio corresponde al exterior de la elipse (incluye el borde) y se debe excluir los ejes  $X$  y  $Y$  (líneas punteadas).

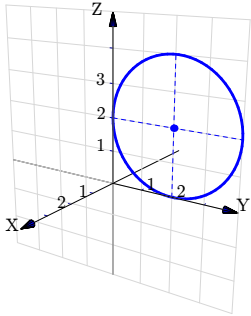


**2.3**

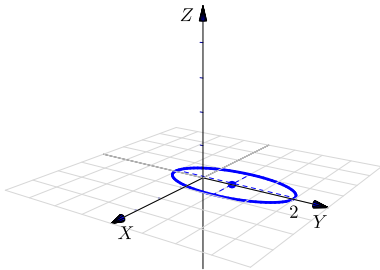
**a.)**  $z = 4 - x^2; y = 0$ .



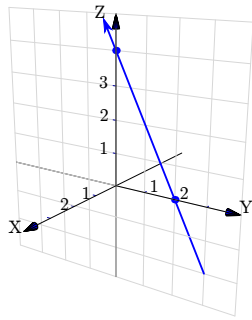
b.)  $(z - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4; x = 0.$



c.)  $\frac{(y - 1)^2}{4} + x^2 = 1; z = 0$



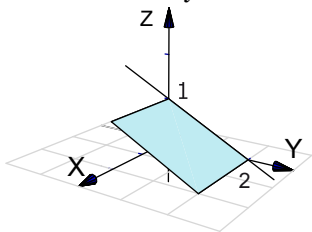
d.)  $z + 2y = 4; x = 0$



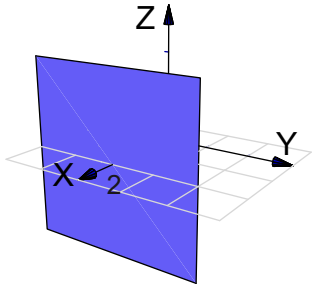
2.4 Es un punto,  $P = (1, -2, 0)$

2.5

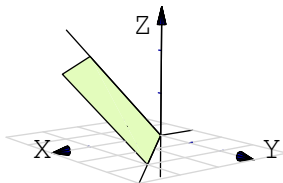
a.) Plano  $2z + y = 2$ .



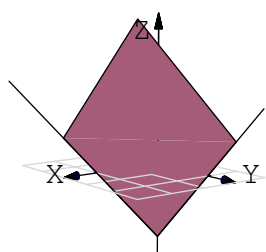
b.) Plano  $x = 2$ .



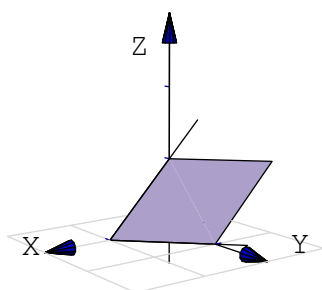
c.) Plano  $x - y - z = 0$ . Podemos usar las rectas  $y = x$  y  $z = x$ .



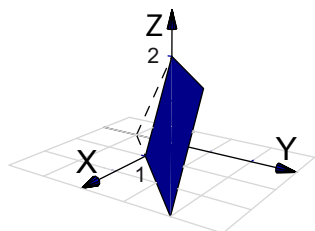
d.) Plano  $x + y - z = 2$ . Podemos usar las intersecciones con los ejes:  $x = 2$ ;  $y = 2$ ;  $z = -1$ .



e.) Plano  $2x + 2y + 2z = 2$ . Podemos usar las intersecciones con los ejes:  $x = 1$ ;  $y = 1$ ;  $z = 1$ .

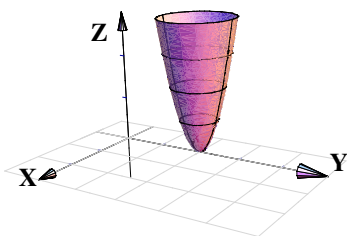


**2.6** Plano  $4x - 4y + 2z = 4$  en el primer octante. En este caso el plano lo dibujamos desde el segmento que va de  $x = 1$  hasta  $z = 2$ .

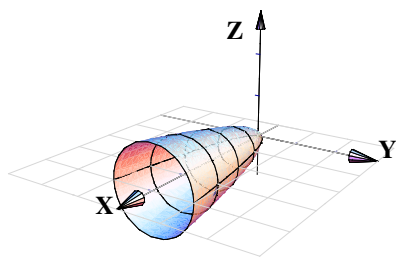


**2.7**

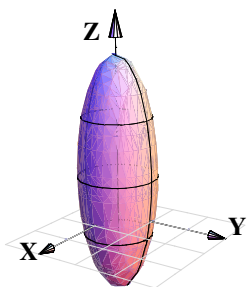
a.)  $x^2 + (y - 2)^2 = z/4$ .



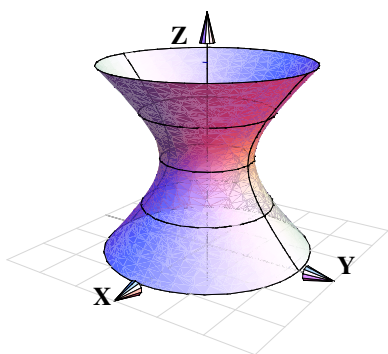
b.)  $z^2 + y^2 = x/4$



c.)  $x^2 + y^2 + (z-1)^2/9 = 1$

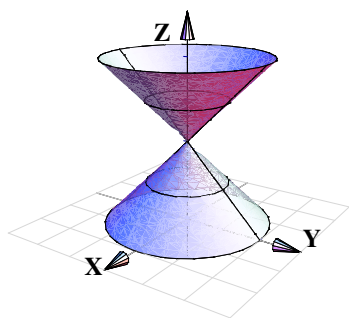


d.)  $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 1$

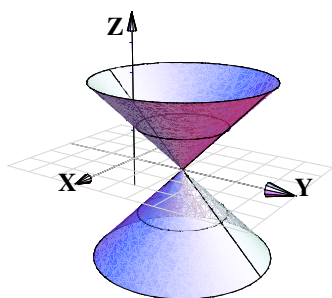


e.)  $x^2 + y^2 - (z-2)^2 = 0$





f.)  $x^2 + (y-2)^2 - z^2 = 0$

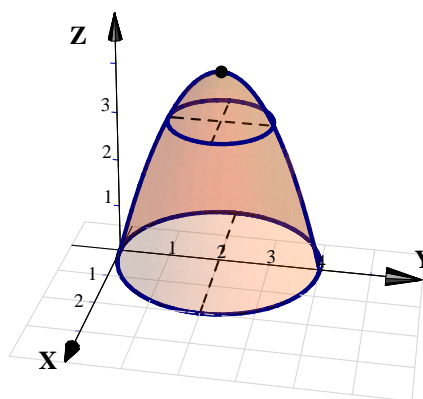
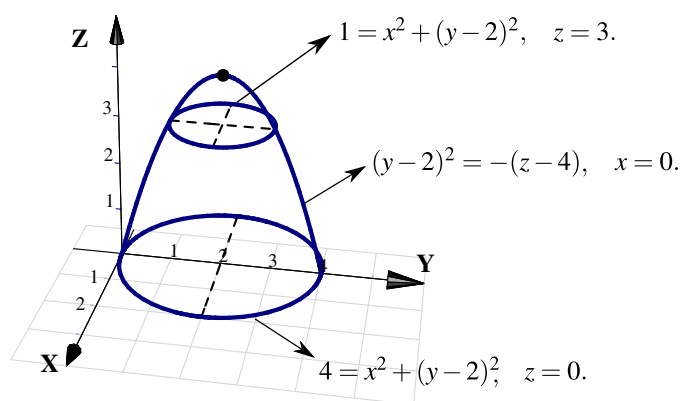


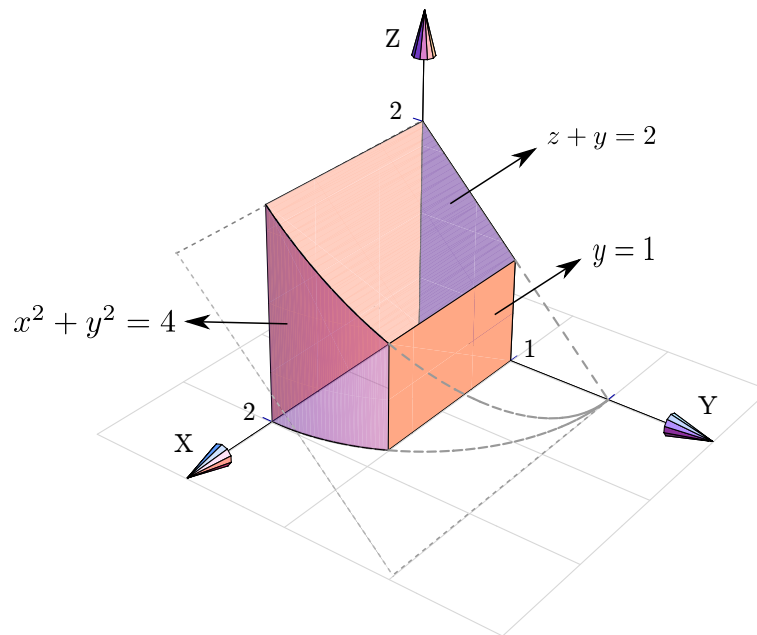
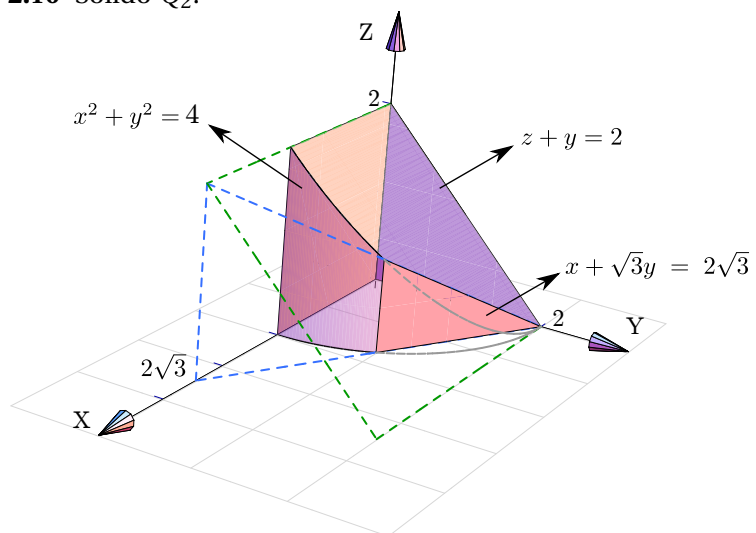
**2.8** Se trata del paraboloide  $4 - z = x^2 + (y-2)^2$ . El vértice es  $(0, 2, 4)$ .

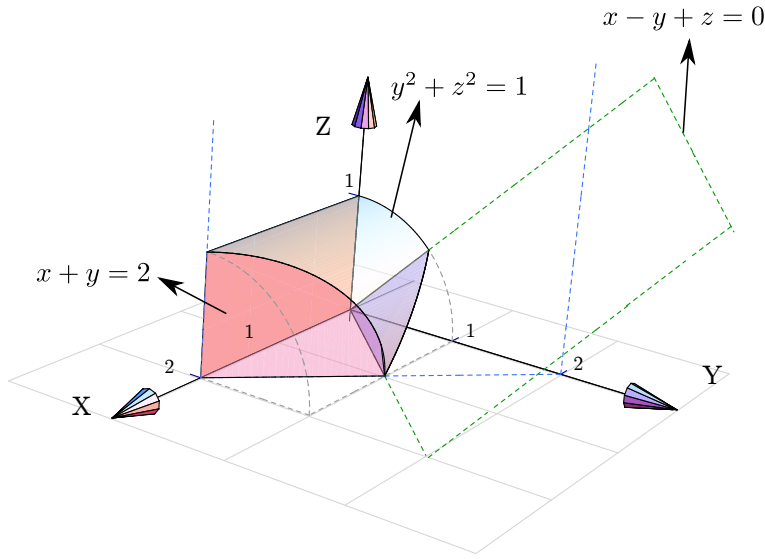
a.) Si  $x = 0$  entonces  $4 - z = (y-2)^2$ . Por tanto la traza es  $(y-2)^2 = -(z-4)$ ,  $x = 0$ .

b.) Si  $z = 3$  obtenemos la traza  $1 = x^2 + (y-2)^2$ ,  $z = 3$ .

c.) Si  $z = 0$  obtenemos la traza  $4 = x^2 + (y-2)^2$ ,  $z = 0$ .

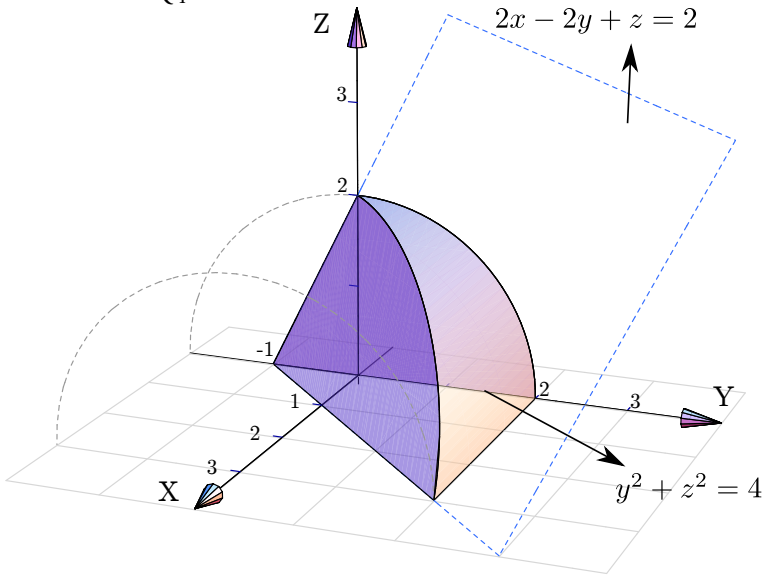


**2.9 Sólido  $Q_1$** **2.10 Sólido  $Q_2$ .**

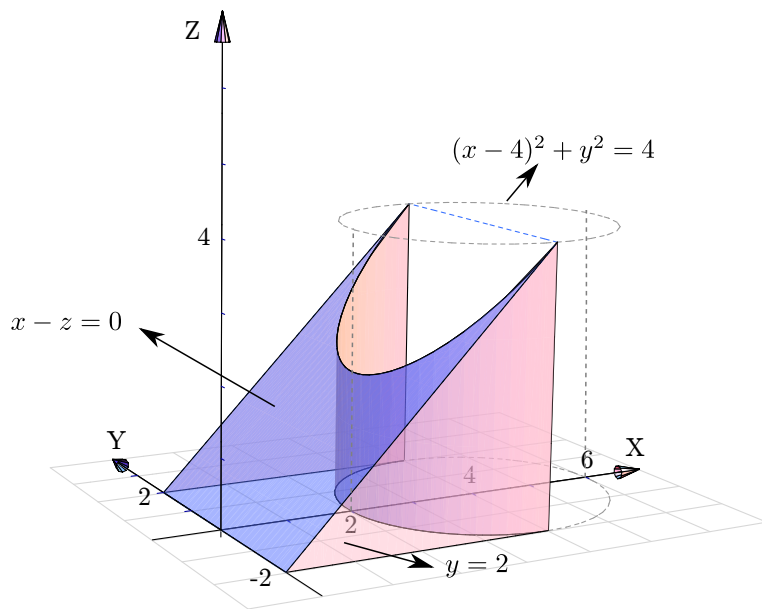
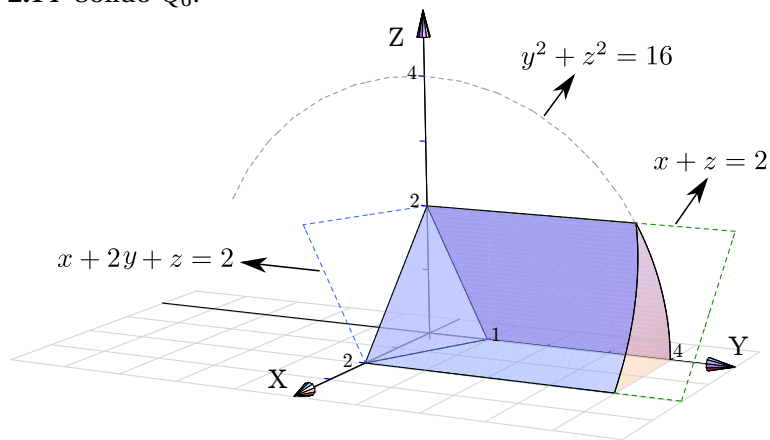
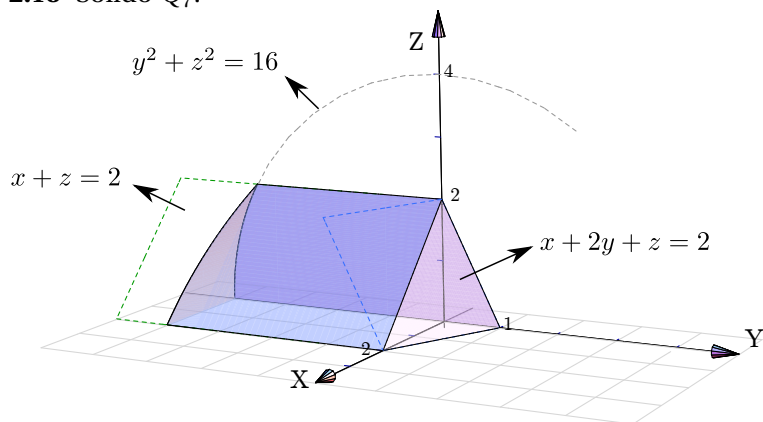


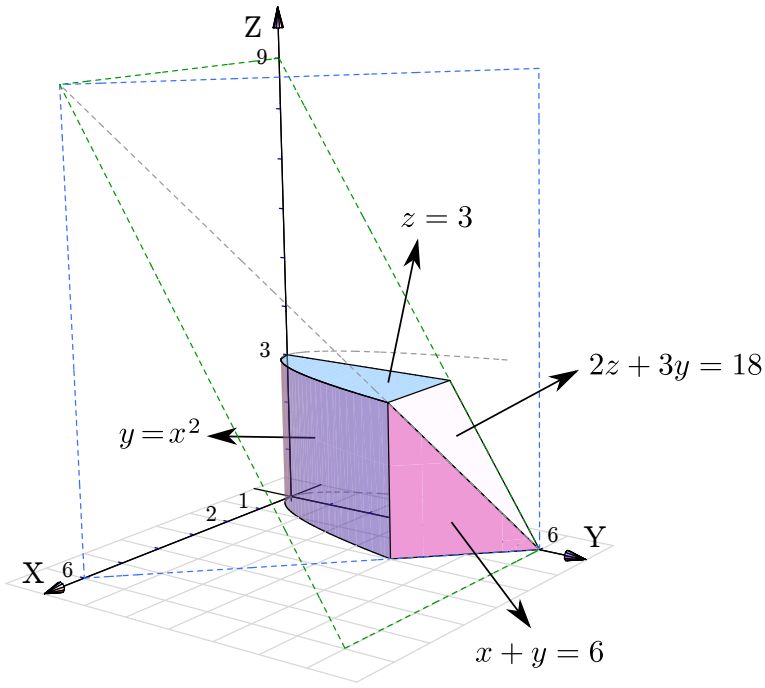
2.11 Sólido  $Q_3$ .

2.12 Sólido  $Q_4$ .

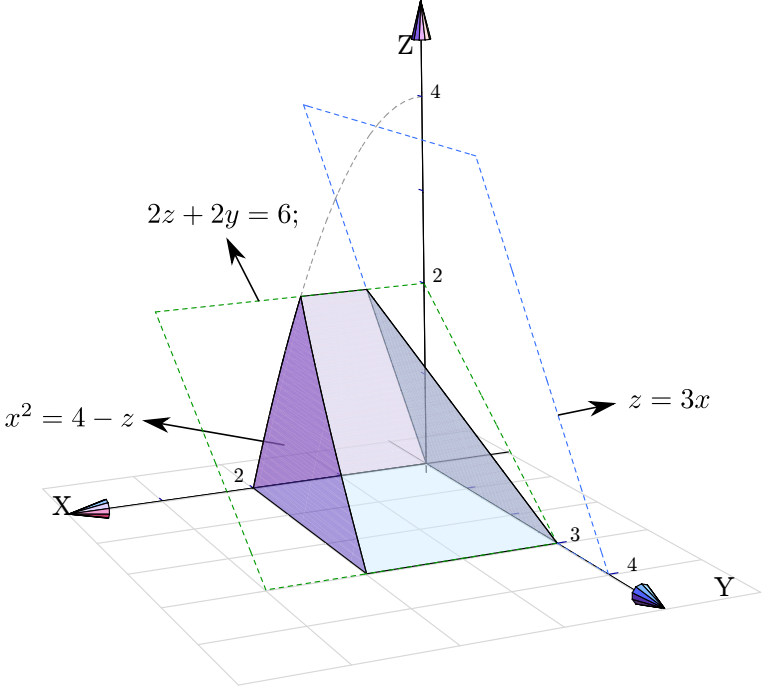


2.13 Sólido  $Q_5$ .

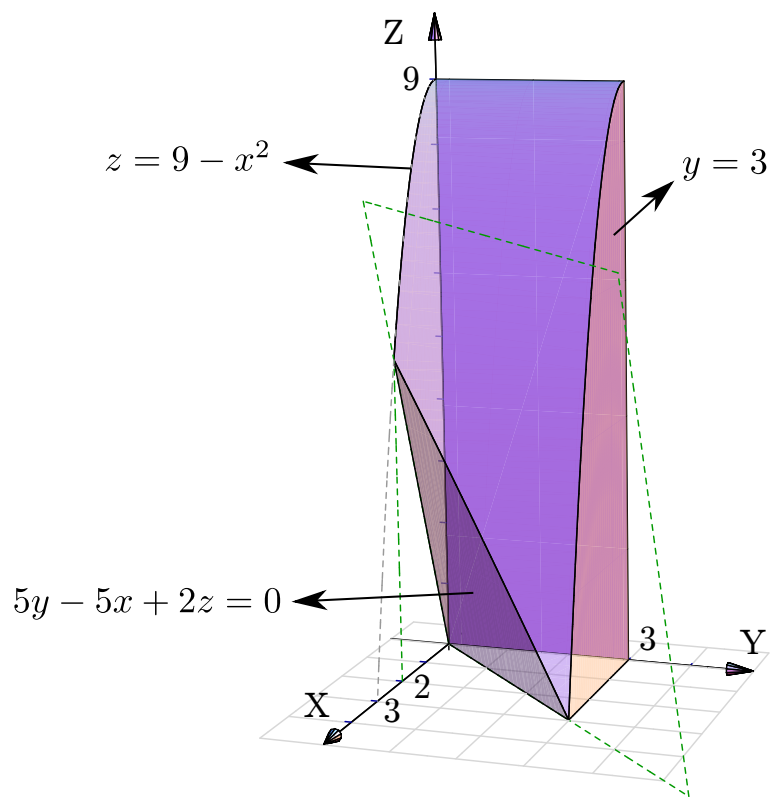
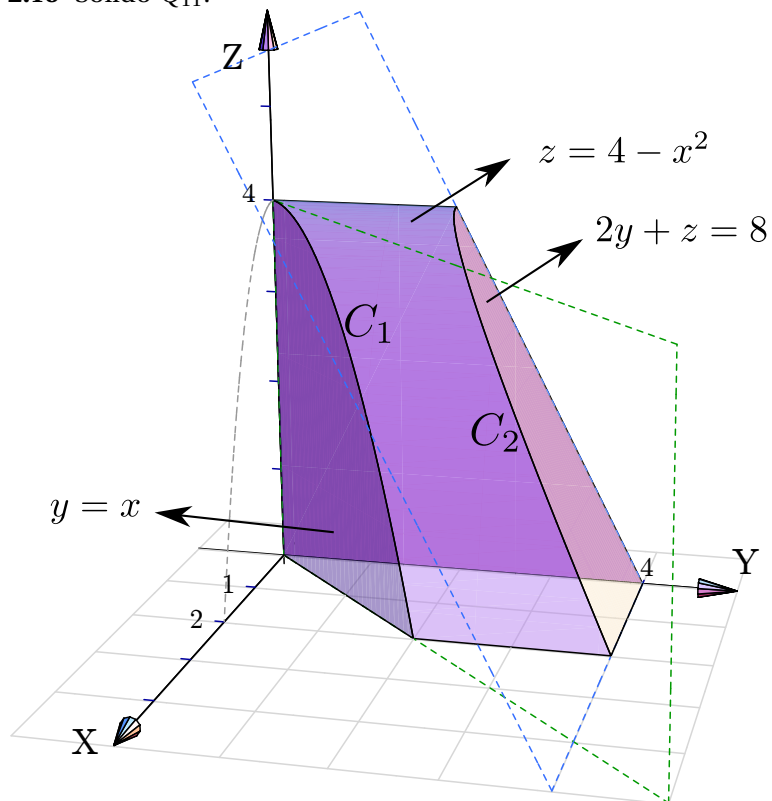
2.14 Sólido  $Q_6$ .2.15 Sólido  $Q_7$ .2.16 Sólido  $Q_8$ .

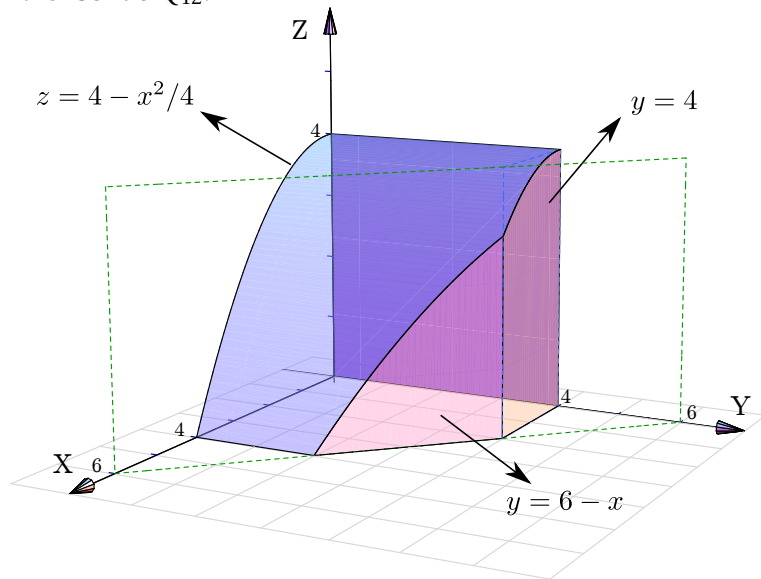
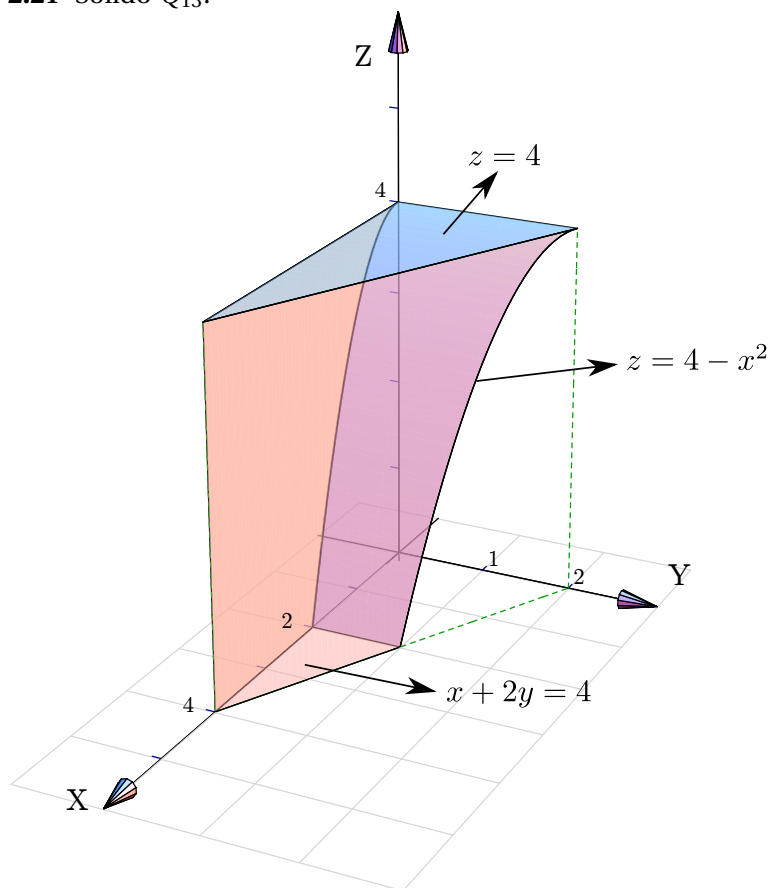


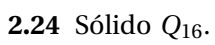
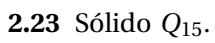
2.17 Sólido  $Q_9$ .



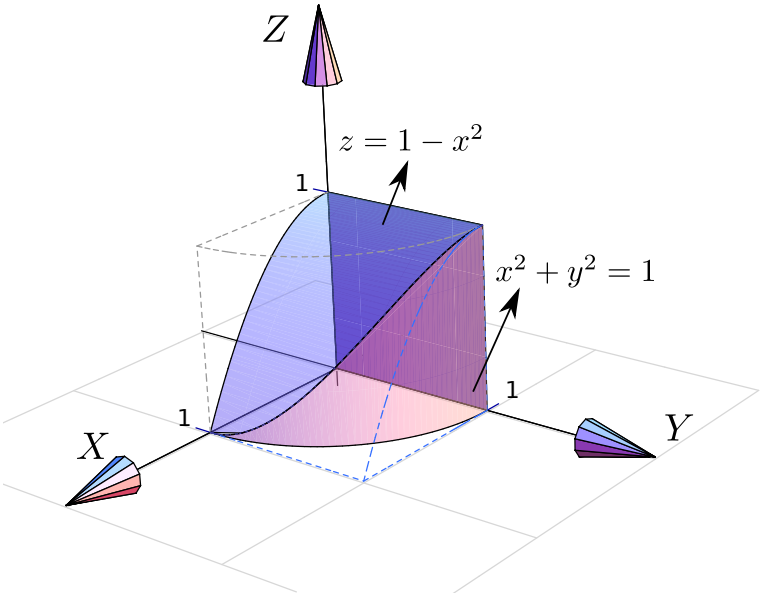
2.18 Sólido  $Q_{10}$ .

2.19 Sólido  $Q_{11}$ .

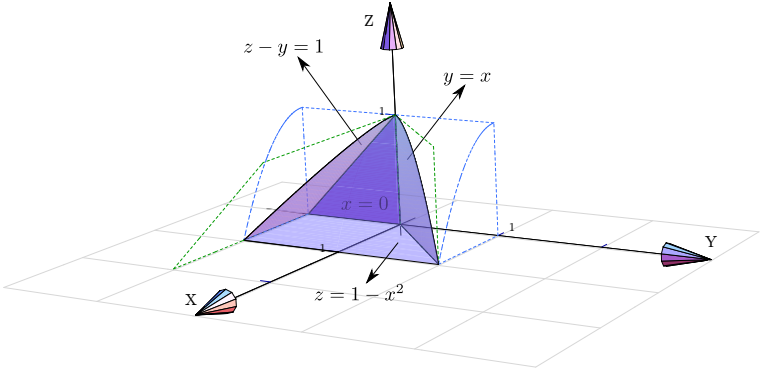
2.20 Sólido  $Q_{12}$ .2.21 Sólido  $Q_{13}$ .2.22 Sólido  $Q_{14}$ .



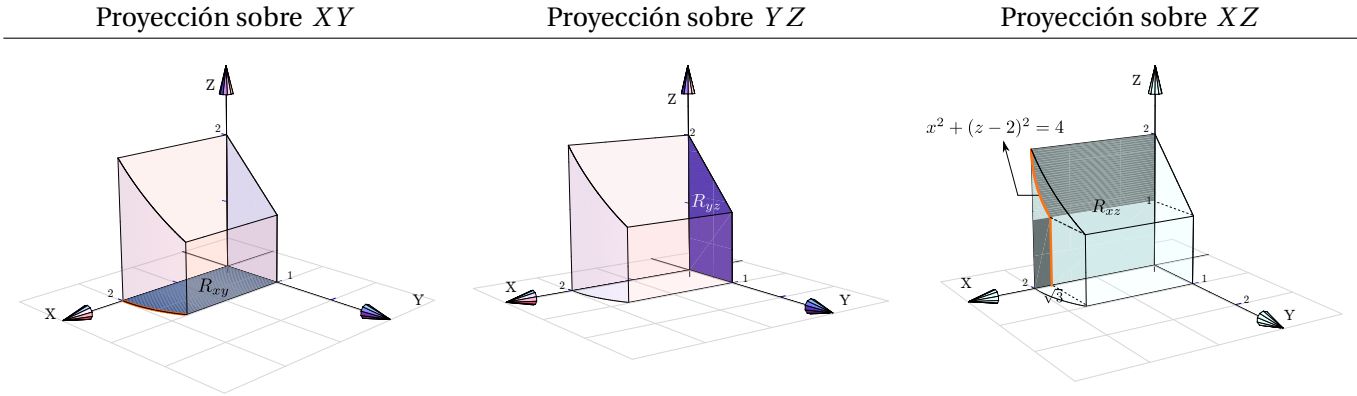




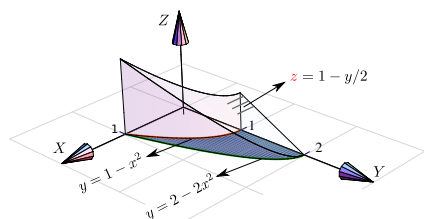
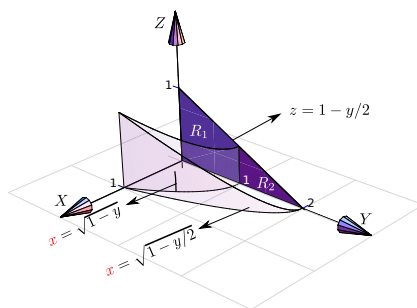
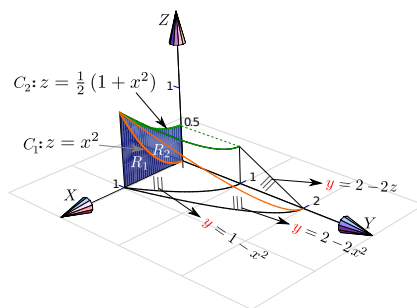
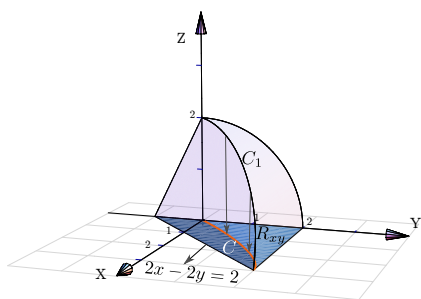
2.25 Sólido  $Q_{17}$ .



2.26 Proyecciones de  $Q$ .

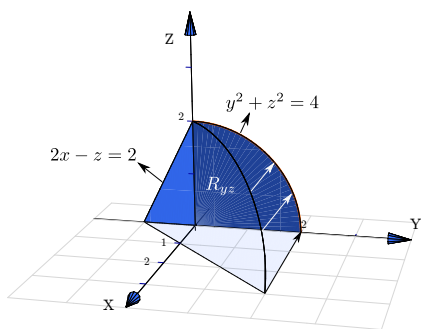


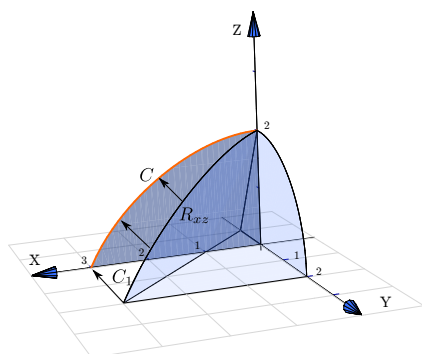
2.27 Proyecciones de  $Q$ .

Proyección sobre  $XY$ Proyección sobre  $YZ$ Proyección sobre  $XZ$ 2.28 Proyecciones de  $Q$ .Proyección sobre  $XY$ 

La curva  $C_1$  se proyecta en la curva  $C$  en el plano  $XY$ . La curva  $C_1$  es la intersección de las superficies  $y^2 + z^2 = 4$  y  $2x - 2y + z = 2$ ; para calcular su ecuación eliminamos  $z$ ,

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + (2 - 2x + z)^2 = 4. \quad (\text{una elipse con rotación}).$$

Proyección sobre  $YZ$ 

Proyección sobre  $XZ$ 

La curva  $C_1$  se proyecta en la curva  $C$  en el plano  $XZ$ . La curva  $C_1$  es la intersección de las superficies  $y^2 + z^2 = 1$  y  $2x - 2y + z = 2$ ,

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(-1 + \frac{z}{2} + x\right)^2 + z^2 = 1. \quad (\text{una elipse con rotación}).$$

## Soluciones del Capítulo 3

3.1 Usando la regla para la derivada del cociente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial}{\partial y} [xy] \cdot (x^2 - y^2) - \frac{\partial}{\partial y} [x^2 - y^2] \cdot xy}{(x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{x \cdot (x^2 - y^2) + 2y \cdot xy}{(x^2 - y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} [xy] \cdot (x^2 - y^2) - \frac{\partial}{\partial x} [x^2 - y^2] \cdot xy}{(x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{y \cdot (x^2 - y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 - y^2)^2} \end{aligned}$$

$$f_y(2, 1) = \frac{10}{9}.$$

3.2 Se debe usar la regla de la cadena para funciones de una variable,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 5 \ln^4(x^y + x^2 + 2^y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} [\ln(x^y + x^2 + 2^y)] \\ &= 5 \ln^4(x^y + x^2 + 2^y) \cdot \frac{1}{x^y + x^2 + 2^y} \cdot (x^y \ln x + 2^y \ln 2) \\ &= \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 5 \ln^4(x^y + x^2 + 2^y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\ln(x^y + x^2 + 2^y)] \\ &= 5 \ln^4(x^y + x^2 + 2^y) \cdot \frac{1}{x^y + x^2 + 2^y} \cdot (y \cdot x^{y-1} + 2x) \end{aligned}$$

3.3

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4a^2 - 2$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4b^2 - 2$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(a^2 + b^2) - 4 = 0. \quad \checkmark$

3.4 Sea  $u = \frac{x^2}{y}$ , entonces  $z = f(u)$

- $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{2x}{y}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{-x^2}{y^2}$
- $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \left[ \frac{2x^2}{y} - \frac{2x^2}{y} \right] = 0 \quad \checkmark$

3.5

- $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y - \frac{y}{x^2 + y^2}}{x}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + \frac{x}{x^2 + y^2}}{2z}$

Ahora sustituimos,

$$\begin{aligned} zx \frac{\partial z}{\partial x} + zy \frac{\partial z}{\partial y} &= zx \frac{y - \frac{y}{x^2 + y^2}}{2z} + zy \frac{x + \frac{x}{x^2 + y^2}}{2z} \\ &= \frac{2xy - \frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2}}{2} = xy \end{aligned}$$

3.6 Pongamos  $C(x, t) = \frac{e^{-x^2/kt}}{\sqrt{t}}$ .

- $\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\left( \sqrt{t} \frac{-2x}{kt} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) e^{-x^2/kt}}{t} = e^{-x^2/kt} \left( \frac{x^2}{kt^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}} \right)$
- $\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{-2x}{kt} e^{-x^2/kt}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^{-x^2/kt} \frac{1}{\sqrt{t}} \left( \frac{4x^2}{k^2 t^2} - \frac{2}{kt} \right) = e^{-x^2/kt} \left( \frac{4x^2}{k^2 t^{5/2}} - \frac{2}{kt^{3/2}} \right)$
- Luego, multiplicando  $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$  por  $\frac{k}{4}$  se obtiene la identidad.

3.7  $z$  es una función de dos variables pero  $f$  es una función de un solo argumento y como tal, se deriva de la manera ordinaria. Aquí es conveniente hacer el cambio de variable  $u = x^2 y + y$  de tal manera que  $z = f(u) \cdot \sqrt{x + y^2}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= f'(u) \cdot \frac{\partial}{\partial y} [u] \cdot \sqrt{x+y^2} + f(u) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sqrt{x+y^2} \right] \\
&= f'(u) \cdot (x^2+1) \cdot \sqrt{x+y^2} + f(u) \cdot \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} \\
&= \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x} [u] \cdot \sqrt{x+y^2} + f(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{x+y^2} \right] \\
&= f'(u) \cdot (2xy) \cdot \sqrt{x+y^2} + f(u) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}
\end{aligned}$$

**3.8** •  $u_x = e^y \cos x$

•  $u_y = e^y \sin x$

•  $u_{xx} = -e^y \sin x$

•  $u_{yy} = e^y \sin x$

•  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \sin x + e^y \sin x = 0 \quad \checkmark$

**3.9** •  $u_t = -a \cos(x-at) + \frac{a}{x+at}$

•  $u_{tt} = -a^2 \sin(x-at) - \frac{a^2}{(x+at)^2}$

•  $u_x = \cos(x-at) + \frac{1}{x+at}$

•  $u_{xx} = -\sin(x-at) - \frac{1}{(x+at)^2}$

•  $u_{tt} = -a^2 \sin(x-at) - \frac{a^2}{(x+at)^2} = a^2 \cdot \left( -\sin(x-at) - \frac{1}{(x+at)^2} \right) = a^2 \cdot u_{xx} \quad \checkmark$

**3.10** Soit  $A = x - at$  et  $B = x + at$ , alors  $u(x, t) = f(A) + g(B)$ .

•  $u_t = -af'(A) + ag'(B)$

•  $u_{tt} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B)$

•  $u_x = f'(A) + g'(B)$

•  $u_{xx} = f''(A) + g''(B)$

•  $u_{tt} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B) = a^2 \cdot u_{xx} \quad \checkmark$

**3.11** Satisfait  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ .

•  $z_x = \frac{e^x}{e^x + e^y}$

•  $z_y = \frac{e^y}{e^x + e^y}$

•  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = 1 \quad \checkmark$

Satisfait  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$ .

•  $z_{xx} = \frac{e^x \cdot (e^x + e^y) - e^x \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2}$

•  $z_{yy} = \frac{e^y \cdot (e^x + e^y) - e^y \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2}$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{e^y}{e^x + e^y} \right] = \frac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} \\
 \bullet \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \frac{e^x \cdot (e^x + e^y) - e^x \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^y \cdot (e^x + e^y) - e^y \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2} - \left( \frac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} \right)^2 \\
 &= \frac{e^x \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} - \left( \frac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} \right)^2 = 0 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

**3.12** Sea  $u = y \sin(x)$ , entonces  $w = f(u)$ .

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad w_x &= f'(u) \cdot y \cos(x) \\
 \bullet \quad w_y &= f'(u) \cdot \sin(x) \\
 \bullet \quad \cos(x) w_x + y \sin(x) w_y &= \cos^2(x) \cdot y \cdot f'(u) + \sin^2(x) \cdot y \cdot f'(u) = (\cos^2 x + \sin^2 x) y f'(u) = y f'(u)
 \end{aligned}$$

**3.13**  $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \sin(3x - 2y) + 3x^2 \cos(3x - 2y)$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y} = -2x^2 \cos(3x - 2y)$  y  $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -4x \cos(3x - 2y) - 6x^2 \sin(3x - 2y)$ .

La identidad se verifica de manera directa.

**3.14** Derivamos a ambos lados respecto a  $R_1$ ,

$$\frac{\partial}{\partial R_1} \left[ \frac{1}{R} \right] = \frac{\partial}{\partial R_1} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right]$$

$$-1 \cdot \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{-1}{R_1^2} \implies \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R^2}{R_1^2}$$

**3.15**

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{\partial P}{\partial V} &= -\frac{P}{V} \\
 \bullet \quad \frac{\partial V}{\partial T} &= \frac{mR}{P} \\
 \bullet \quad \frac{\partial T}{\partial T} &= \frac{P}{V} \\
 \bullet \quad \frac{\partial P}{\partial P} &= \frac{mR}{V} \\
 \bullet \quad \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} &= -\frac{P}{V} \frac{mR}{P} \frac{V}{mR} = -1. \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

**3.16**  $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = \frac{1}{2} v^2 \cdot m = K. \quad \checkmark$

**3.17**

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= f'(u) \cdot 2x \cdot g(y) \\
 \bullet \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2g(y) \cdot [f''(u) \cdot 2x^2 + f'(u)] \\
 \bullet \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} &= 2x[f''(u) \cdot 2y \cdot g(y) + g'(y) \cdot f'(u)] \\
 \bullet \quad \frac{\partial w}{\partial y} &= f'(u) \cdot 2y \cdot g(y) + g'(y) \cdot f(u)
 \end{aligned}$$

**3.18**

$$\bullet \quad \frac{\partial w}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{1}{y} + g'(v) \cdot \frac{-y}{x^2}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = f''(u) \cdot \frac{-x}{y^2} \cdot \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \cdot f'(u) + g''(v) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{-y}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot g'(v).$$

**3.19** Sea  $u = x^2 - 4y^2$ ,

$$\bullet \frac{\partial w}{\partial y} = -e^{3x} f'(u) \cdot 8y$$

$$\bullet \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 8y [-3e^{3x} f'(u) - e^{3x} f''(u) \cdot 2x]$$

**3.20**  $\frac{\partial u}{\partial r} = n(n-1)r^{n-2} \cos(n\theta)$  y  $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -n^2 r^n \sin(n\theta)$ . Sustituyendo y simplificando se verifica la ecuación.

**3.21**

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= (y^2 + 1) \cdot \cos t + 2xy \cdot \sec^2 t \end{aligned}$$

**3.22**  $\frac{dw}{dt} = 2t + 2t \sin 2t + 2t^2 \cos 2t$

**3.23**

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left[ \sqrt{u+v^2} + \frac{u}{2\sqrt{u+v^2}} \right] \cdot y + \left[ \frac{uv}{\sqrt{u+v^2}} \right] \cdot \frac{-y/x^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left[ \sqrt{u+v^2} + \frac{u}{2\sqrt{u+v^2}} \right] \cdot x + \left[ \frac{uv}{\sqrt{u+v^2}} \right] \cdot \frac{1/x}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

**3.24**

**a.)**  $\frac{\partial z}{\partial x} = g(y) \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]$

**b.)**  $\frac{\partial z}{\partial y} = g'(y) \cdot f(x, y) + g(y) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]$

**c.)**  $\frac{\partial z}{\partial t} = g'(y) \cdot 3t^2 \cdot f(x, y) + g(y) \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 3t^2 \right]$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = g'(y) \cdot 2u \cdot f(x, y) + g(y) \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2u \right]$$

**3.25** •  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial v}$

• Aplicamos regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial v} \right] \\ &= 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + y \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot x \right] + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot x \right]\end{aligned}$$

**3.26**

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot 2v + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot 2v\end{aligned}$$

**3.27** •  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}$

• Aplicamos la regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2x \frac{\partial f}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ y \frac{\partial f}{\partial v} \right] \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \left[ 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \right] + y \left[ 2x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right]\end{aligned}$$

• Simplificando se obtiene el resultado.

**3.28** Primero debemos hacer un cambio de variable para poder aplicar la regla de la cadena. Sea  $z = f(u, v) - g(w)$ . Entonces,

$$z_y = f_u \cdot -\sin y - g(w) \cdot 6xy.$$

$$z_{xy} = -\sin y (f_{uu} \cdot 2x + f_{uv} \cdot 2x) - g''(w) \cdot 3y^2 \cdot 6xy + 6y \cdot g'(w)$$

**3.29** Primero debemos hacer un cambio de variable para poder aplicar la regla de la cadena. Sea  $z = x^2 f^4(u, v)$ . Entonces,

$$z_x = 2x f^4(u, v) + x^2 (4f^3(u, v) \cdot (f_u \cdot y + f_v \cdot 0))$$

$$z_y = x^2 (4f^3(u, v) \cdot (f_u \cdot x + f_v \cdot 2y))$$



**3.30** Las derivadas parciales que se piden aparecen cuando calculamos  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . La idea es despejar a partir de estos dos cálculos.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot -1 + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{y+2x^2} \left[ \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right]$$

De manera análoga,  $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{1}{y+2x^2} \left[ \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right]$

**3.31** Sea  $u = xy$ . Con un cálculo directo obtenemos  $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'(u)$  y  $\frac{\partial z}{\partial y} = xf'(u)$ . Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene el resultado.

**3.32**

**3.33** Al aplicar el cambio de variable,  $z$  es una función de  $u$  y  $v$ , es decir,  $z = z(u, v)$ . Por tanto

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} u_x + \frac{\partial z}{\partial v} v_x = y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x^2}{y} \frac{\partial z}{\partial v}$$

Sustituyendo  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $x = \sqrt{uv}$  y  $y = \sqrt{u/v}$  en (\*), nos queda

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v \operatorname{sen} u$$

**3.34** Sea  $F(x, y, z) = x^2 y^2 + \operatorname{sen}(xyz) + z^2 - 4$ . Si las derivadas parciales  $z_x$  y  $z_y$  existen en todo el dominio en el que  $F_z \neq 0$ , entonces

- $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xy^2 + yz \cos(xyz)}{xy \cos(xyz) + 2z}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2x^2 y + xz \cos(xyz)}{xy \cos(xyz) + 2z}$
- La identidad se obtiene sustituyendo y simplificando.

**3.35** En este caso,  $F = g\left(\frac{xy}{z}, x^2 + y^2\right)$ .

- $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z} = -\frac{g_u \cdot \frac{y}{z} + g_v \cdot 2x}{-g_u \cdot \frac{xy}{z^2}}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{g_y}{g_z} = -\frac{g_u \cdot \frac{x}{z} + g_v \cdot 2y}{-g_u \cdot \frac{xy}{z^2}}$

$$\bullet \quad y \cdot \frac{g_u \cdot \frac{y}{z} + g_v \cdot 2x}{g_u \cdot \frac{xy}{z^2}} - x \cdot \frac{g_u \cdot \frac{x}{z} + g_v \cdot 2y}{g_u \cdot \frac{xy}{z^2}} = - \frac{g_u \left( \frac{x^2 - y^2}{z} \right)}{g_u \cdot \frac{xy}{z^2}} = - \frac{z(x^2 - y^2)}{xy} \quad \checkmark$$

**3.36** Sea  $F = z - f(u)$  con  $u = z/xy$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = - \frac{-f'(u) \cdot \frac{-z}{x^2 y}}{1 - f'(u) \cdot \frac{1}{xy}} = - \frac{z}{x} \cdot \frac{f'(u)}{xy - f'(u)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z} = - \frac{-f'(u) \cdot \frac{-z}{xy^2}}{1 - f'(u) \cdot \frac{1}{xy}} = - \frac{z}{y} \cdot \frac{f'(u)}{xy - f'(u)}.$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = -x \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{f'(u)}{xy - f'(u)} - y \cdot -\frac{z}{y} \cdot \frac{f'(u)}{xy - f'(u)} = 0 \quad \checkmark$$

**3.37** La primera derivada se hace derivando implícitamente; las segundas derivadas son derivadas ordinarias.

$$\bullet \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{z \ln(yz)}{x - z}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ - \frac{z \ln(yz)}{x - z} \right] = - \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \ln(yz) + z \cdot \frac{y \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{yz} - \left( 1 - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot z \ln(yz)}{(x - z)^2} \\ &= - \frac{- \frac{z \ln(yz)}{x - z} \cdot \ln(yz) + z \cdot \frac{y \cdot - \frac{z \ln(yz)}{x - z}}{yz} - \left( 1 + \frac{z \ln(yz)}{x - z} \right) \cdot z \ln(yz)}{(x - z)^2} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{xz}{y(x - z)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ - \frac{xz}{y(x - z)} \right] = - \frac{x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y(x - z) - \left( x - z - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot xz}{y^2(x - z)^2} \\ &= - \frac{x \cdot \frac{xz}{y(x - z)} \cdot y(x - z) - \left( x - z - y \cdot \frac{xz}{y(x - z)} \right) \cdot xz}{y^2(x - z)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{xz}{y(x-z)} \right] = -\frac{\left( z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot y(x-z) - \left( y - y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot xz}{y^2(x-z)^2} \\
&= -\frac{\left( z + x \cdot -\frac{z \ln(yz)}{x-z} \right) \cdot y(x-z) - \left( y - y \cdot -\frac{z \ln(yz)}{x-z} \right) \cdot xz}{y^2(x-z)^2}
\end{aligned}$$

**3.38****3.39****3.40****3.41****3.42**

**a.)**  $\nabla f = (-2x, -2y)$

$$D_{\vec{u}}f(Q) = \nabla f(Q) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (-2, -2) \cdot \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

**b.)**

$$D_u f(P) = (-2a, -2b) \cdot (-2, 1)/\sqrt{5} = \sqrt{2} \implies 4a - 2b = \sqrt{10}$$

$$D_v f(P) = (-2a, -2b) \cdot (1, 1)/\sqrt{2} = \sqrt{5} \implies -2a - 2b = \sqrt{10}$$

Entonces,  $a = 0$  y  $b = -\sqrt{5}/2$ .  $P = (0, -\sqrt{5}/2, 3/2)$ .

**c.)** La superficie  $S$  tiene ecuación  $z = 4 - x^2 - y^2$ . Si  $G = z - 4 + x^2 + y^2$  entonces un vector normal al plano es  $N = \nabla G(R) = (2, -2, 1)$ . Luego la ecuación cartesiana es  $2x - 2y + z = 6$ .

**d.)**  $D_u f(R)$  es máxima si  $\vec{u} = \nabla f(R) = (-2, 2)$ . En este caso,  $D_{\nabla f(R)} f(R) = \|\nabla f(R)\| = \sqrt{8}$ .

**3.43**

**a.)**  $\nabla f = \left( -\frac{2x + yz}{xy + 3z^2}, \frac{-xz}{xy + 3z^2} \right)$

$$D_{\vec{u}}f(Q) = \nabla f(Q) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (-1, 0) \cdot \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

**b.)**  $D_{\vec{v}}f(P) = (-2/b, 0) \cdot (-2, 1)/\sqrt{5} = \sqrt{2} \implies b = 4/\sqrt{10}$

**c.)** La superficie  $S$  tiene ecuación  $G(x, y, z) = x^2 + xyz + z^3 - 1$ , entonces  $\nabla G = (2x + yz, xz, xy + 3z^2)$ . Un vector normal al plano es  $N = \nabla G(R) = (1, 1, 2)$ . Luego la ecuación cartesiana es  $x + y + 2z = 2$ .

d.)  $D_{\vec{u}}z(R)$  es mínima si  $\vec{u} = -\nabla z(R) = (1/2, 1/2)$ . En este caso,  $D_{\nabla z(R)}z(R) = -\|\nabla z(R)\| = -\sqrt{1/2}$ .

### 3.44

a.)  $z = z(x, y)$  está definida de manera implícita. Sea  $F(x, y, z) = z^3 + xz + y - 1$ .

$$\nabla z = \left( -\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z} \right) = \left( -\frac{z}{3z^2 + x}, -\frac{1}{3z^2 + x} \right);$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}z(P) &= \nabla z(P) \cdot \frac{(1, -2)}{\sqrt{5}} \\ &= (0, -1) \cdot \frac{(1, -2)}{\sqrt{5}} = 2/\sqrt{5} \approx 0.894427. \end{aligned}$$

b.) El máximo valor que podría alcanzar la derivada direccional en  $P$  es  $\|\nabla z(P)\| = 1$  cuando  $\vec{v} = \nabla z(P) = (0, -1)$ .

c.) Como la superficie  $S$  tiene ecuación  $G(x, y, z) = z^3 + xz + y - 1$ , la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto  $P$  es  $\nabla G(P) \cdot (x, y, z) = \nabla G(P) \cdot P$ .

$$\bullet \nabla G(x, y, z) = (z, 1, 3z^2 + x)$$

$$\bullet N = \nabla G(1, 1, 0) = (0, 1, 1)$$

La ecuación cartesiana del plano tangente en el punto  $P$  es  $y + z = 1$ .

### 3.45

a.)  $z = z(x, y)$  está definida de manera implícita. Sea  $F(x, y, z) = xyz^2 - 8z$ .

$$\nabla z = \left( -\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z} \right) = \left( -\frac{yz^2}{2zxy - 8}, -\frac{xz^2}{2zxy - 8} \right);$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}z(P) &= \nabla z(P) \cdot \frac{(-5, \sqrt{2})}{\sqrt{27}} \\ &= (-8, -8) \cdot \frac{(-5, \sqrt{2})}{\sqrt{27}} = \frac{40 - 8\sqrt{2}}{\sqrt{27}} \approx 5.52068 \end{aligned}$$

b.)

c.) Como la superficie  $S$  tiene ecuación  $G(x, y, z) = xyz^2 - 8z$ , la ecuación cartesiana del plano tangente en el punto  $P$  es  $\nabla G(P) \cdot (x, y, z) = \nabla G(P) \cdot P$ .

$$\bullet \nabla G(x, y, z) = (yz^2, xz^2, 2xyz - 8)$$

$$\bullet N = \nabla G(1, 1, 8) = (64, 64, 8)$$

La ecuación cartesiana del plano tangente en el punto  $P$  es  $64x + 64y + 8z = 192$ .

**3.46** La recta normal  $L$  pasa por  $P$  y va en la dirección de un vector normal a la superficie  $S$  en  $P$ . Podemos tomar  $N = \nabla G(P) = (1, 1, 2/\sqrt{2})$ , así una ecuación vectorial de la recta es  $L: (x, y, z) = P + t(1, 1, 2/\sqrt{2}), t \in \mathbb{R}$ .

**3.47**

a.)

b.)

**3.47**

## Soluciones del Capítulo 4

**4.1** Puntos críticos.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \implies y = x^3, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \implies x(x^8 - 1) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos críticos:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ .

Clasificación.  $D_2(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 12x^2 \cdot 12y^2 - 16$ .

$P$	$f_{xx}(P)$	$f_{yy}(P)$	$(f_{xy}(P))^2$	$D_2(P)$	Clasificación
$(0, 0)$	0	0	16	-16	$(0, 0, 1)$ es punto de silla.
$(1, 1)$	12	12	16	128	$(1, 1, -1)$ es mínimo local.
$(-1, -1)$	12	12	16	128	$(-1, -1, -1)$ es mínimo local

**4.2** Puntos críticos.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 & (E1) \\ f_y = 6xy - 6y = 0 & (E2) \end{cases} \implies \begin{cases} 3(x^2 + y^2 - 2x) = 0 \\ 6y(x - 1) = 0 \end{cases} \implies y = 0 \text{ o } x = 1.$$

● Si  $y = 0$ , sustituyendo en (E1) queda

$$3(x^2 - 2x) = 0 \implies x = 0, x = 2.$$

● Si  $x = 1$ , sustituyendo en (E1) queda

$$3(y^2 - 1) = 0 \implies y = 1, y = -1.$$

Finalmente, tenemos cuatro puntos críticos:  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$ .

Clasificación.

$$D_2(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6x - 6) \cdot (6x - 6) - 36y^2.$$

- En  $(0, 0)$   $f$  **alcanza** un máximo relativo, pues  $D_2(0, 0) = 36 > 0$  y  $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ .
- En  $(2, 0)$   $f$  **alcanza** un mínimo relativo pues  $D_2(2, 0) = 36 > 0$  y  $f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ .
- En  $(1, 1)$   $f$  **no alcanza** un extremo pues  $D_2(1, 1) = -36 < 0$  (punto de silla).
- En  $(1, -1)$   $f$  **no alcanza** un extremo pues  $D_2(1, -1) = -36 < 0$  (punto de silla).

**4.3** Como  $P = (1, 2)$  es punto crítico, las derivadas parciales de  $z$  se anulan en  $P$ , es decir

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 0 \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \left( y - \frac{a}{x^2} \right) \Big|_{(1,2)} = 0 \\ \left( x - \frac{b}{y^2} \right) \Big|_{(1,2)} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2 - \frac{a}{1^2} = 0 \\ 1 - \frac{b}{2^2} = 0 \end{cases} \implies a = 2 \text{ y } b = 4$$

$$\text{Ahora, } D_2(x, y) = \left( \frac{2a}{x^3} \right) \left( \frac{2b}{y^3} \right) - 1^2 = \left( \frac{4}{x^3} \right) \left( \frac{8}{y^3} \right) - 1.$$

- $D_2(1, 2) = 3$  y  $z_{xx}(1, 2) = 4 > 0$ . Luego, en el punto  $P = (2, 1)$   $z$  alcanza un mínimo relativo.

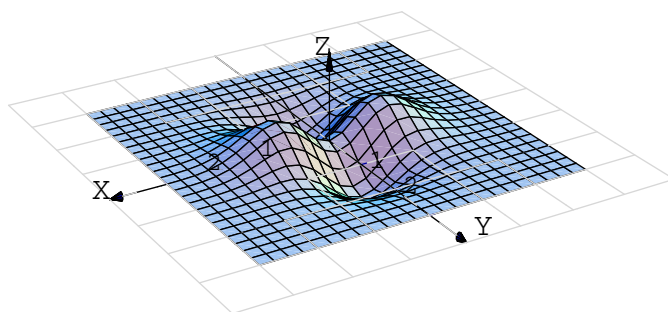
**4.4** ● Puntos críticos: Resolvemos el sistema,

$$\begin{cases} z_x = 8x - y = 0 \implies 8x = y \\ z_y = -x + 2y = 0 \implies 2y = x \end{cases} \implies 16y = y \implies y = 0$$

así, el único punto crítico es  $(0, 0)$ .

- Test:  $D_2(x, y) = 8 \cdot 2 \cdot -(-1)^2 = 15$  (es constante) y puesto que  $z_{xx} = 8 > 0$ , entonces  $(0, 0, 0)$  es un mínimo relativo.

**4.5** La gráfica de  $f$  es,



● Puntos críticos: El sistema es 
$$\begin{cases} z_x = 2xe^{-x^2-y^2} - 2xe^{-x^2-y^2}(x^2-y^2) = 0 \\ z_y = -2ye^{-x^2-y^2} - 2ye^{-x^2-y^2}(x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

Simplificando queda 
$$\begin{cases} e^{-x^2-y^2} 2x(1-x^2+y^2) = 0 \\ -e^{-x^2-y^2} 2y(1+x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

como  $e^{-x^2-y^2} > 0$  entonces nos queda el sistema

$$\begin{cases} 2x(1-x^2+y^2) = 0 \\ -2y(1+x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

Tenemos 4 casos:

- CASO 1.)  $2x = 0$  y  $2y = 0$ . Entonces  $x = 0$  y  $y = 0$ .
- CASO 2.)  $2x = 0$  y  $(1+x^2-y^2) = 0$ . Entonces  $x = 0$  y  $y = \pm 1$
- CASO 3.)  $-2y = 0$  y  $(1-x^2+y^2) = 0$ . Entonces  $y = 0$  y  $x = \pm 1$
- CASO 4.)  $(1-x^2+y^2) = 0$  y  $(1+x^2-y^2) = 0$ . Este caso es inconsistente pues quedaría

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad x^2 - y^2 = -1$$

● Test: Calculamos  $D_2$  y evaluamos cada uno de los cinco puntos.

$$z_{xx} = 2e^{-x^2-y^2}(2x^4 - x^2(2y^2 + 5) + y^2 + 1)$$

$$z_{yy} = 2e^{-x^2-y^2}(x^2(2y^2 - 1) - 2y^4 + 5y^2 - 1)$$

$$z_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}(x^2 - y^2)$$

Luego tenemos:

- Para  $P = (0, 0, 0)$ ,  $D_2(P) = -4$ .  $P$  es un punto de silla.
- Para  $(0, 1, -1/e)$ ,  $D_2(P) = 2.165 > 0$   $z_{xx} = 1.47 < 0$ . Se trata de un mínimo relativo.
- Para  $(0, -1, -1/e)$ ,  $D_2(P) = 2.165 > 0$   $z_{xx} = 1.47 < 0$ . Se trata de un mínimo relativo.
- Para  $(1, 0, 1/e)$ ,  $D_2(P) = 2.165 > 0$   $z_{xx} = -1.47 < 0$ . Se trata de un máximo relativo.
- Para  $(-1, 0, -1/e)$ ,  $D_2(P) = 2.165 > 0$   $z_{xx} = -1.47 < 0$ . Se trata de un máximo relativo.

**4.6** La distancia del punto al paraboloide es  $d(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (x^2 + y^2)^2}$ .

**Puntos críticos:** Debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} x - 2 + 2x(x^2 + y^2) &= 0 \\ y - 2 + 2y(y^2 + x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Como  $x = 0$ ,  $y = 0$  no es solución del sistema, podemos asumir que  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ . Luego, despejando  $x^2 + y^2 = \frac{2-x}{2x} = \frac{2-y}{2y} \implies x = y$ .

Ahora, sustituyendo  $x = y$  en cualquiera de las ecuaciones, obtenemos  $x - 2 + 4x^3 = 0$ . La calculadora nos da las soluciones  $x = 0.68939835\dots$ ,  $y = 0.68939835\dots$ .

**Clasificación.**  $D_2(x, y) = [(1+4x^2+2(x^2+y^2)) \cdot [1+4y^2+2(x^2+y^2)] - 16x^2y^2]$ . Evaluamos  $D_2(0.68939835\dots, 0.68939835\dots) = 19.4466\dots > 0$  y  $f_{xx}(0.68939835\dots, 0.68939835\dots) > 0$ , es decir, el punto en el paraboloide donde se alcanza la distancia mínima al punto  $(2, 2, 2)$  es  $(0.68939835\dots, 0.68939835\dots, z(0.68939835\dots, 0.68939835\dots))$ .

**4.7** Los puntos críticos son  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(-1, -1)$

**4.8** Suponga que las dimensiones de la caja son  $x$  cm de ancho,  $y$  cms de largo y  $z$  cms de alto, entonces su volumen es :

$$512 = xyz \implies z = \frac{512}{xy}$$

Por otro lado, el costo total esta dado por  $c(x, y, z) = 20xz + 20yz + 40xy$

De donde obtenemos que



$$c(x, y) = \frac{10240}{x} + \frac{10240}{y} + 40xy$$

Calculando las derivadas parciales, formamos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x} = 40y - \frac{10240}{x^2} = 0 & (E1) \\ \frac{\partial c}{\partial y} = 40x - \frac{10240}{y^2} = 0 & (E2) \end{cases}$$

Multiplicando por (E1) por  $x$  a ambos lados y (E2) por  $y$  a ambos lados, obtenemos  $\frac{10240}{x} = \frac{10240}{y}$ , es decir,  $x = y$ . Sustituyendo en (E1) obtenemos  $x = y = \sqrt[3]{256}$

$$c_{xx} = \frac{20480}{x^3}$$

$$D_2(x, y) = -1600 + \frac{419430400}{x^3 y^3}$$

y al evaluar en el punto  $P = (\sqrt[3]{256}, \sqrt[3]{256})$ , tenemos que

$$c_{xx}(P) = 80 > 0$$

$$D_2(P) = 4800 > 0$$

Con lo cual las dimensiones de la caja con costo mínimo son  $x = \sqrt[3]{256}$ ,  $y = \sqrt[3]{256}$  y  $z = 8\sqrt[3]{4}$ .

## 4.9

### 4.10

**4.11** El área de la superficie es  $S(x, y, h) = 2xh + 2yh + 2xy = 64$ . Despejando  $h$  obtenemos que el volumen es  $V = xy \frac{32 - xy}{x + y}$ . Resolviendo  $\nabla V = (0, 0)$  obtenemos  $x = y = \sqrt{32/3}$ .

**4.12** Problema: "Maximizar  $V(r, h) = \pi r^2 h$  sujeto a  $48\pi = 2\pi r h + \pi r^2$ ."

•  $L(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - \lambda(2r h + r^2 - 48)$ .

•  $\begin{cases} L_r = 2\pi r h - \lambda(2h + 2r) = 0 & (1) \\ L_h = \pi r^2 - \lambda 2r = 0 & (2) \\ L_\lambda = 2r h + r^2 = 48 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\pi r h}{h + r}, \text{ pues } h > 0 \text{ y } r > 0. \\ \lambda = \pi r / 2 \\ 2r h + r^2 = 48 \end{cases}$

Ahora,  $\lambda = \lambda \Rightarrow \frac{\pi r h}{h + r} = \frac{\pi}{2} r \Rightarrow r(h - r) = 0 \Rightarrow r = h \text{ (} r > 0 \text{)}.$

Luego, sustituimos  $r = h$  en la ecuación (3):

$$2rh + r^2 = 48 \implies 2h^2 + h^2 = 48 \implies h = \pm 4.$$

$\therefore$  Las dimensiones son  $h = 4$  y  $r = 4$ .

#### 4.13

a.) Como  $xy^2z = 32$  entonces  $x$ ,  $y$  ni  $z$  puede ser nulos (sino el producto sería 0).

b.) Problema:

“Minimizar  $d(Q, O)$  sujeto a la restricción  $xy^2z = 32$ .”

“Minimizar  $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  sujeto a la restricción  $xy^2z = 32$ .”

sea  $L(x, y, z, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \lambda(xy^2z - 32) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \lambda xy^2z + 32\lambda$ .

● Puntos críticos.

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \lambda y^2z = 0 \text{ (E1)} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 2\lambda xyz = 0 \text{ (E2)} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \lambda xy^2 = 0 \text{ (E3)} \\ xy^2z - 32 = 0 \text{ (E4)} \end{cases}$$

Como  $x$ ,  $y$  y  $z$  son no nulos, podemos despejar  $\lambda$  en las ecuaciones (E1), (E2) y (E3),

$$\lambda = \frac{\overbrace{\frac{x}{y^2z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}^{2x^2 = y^2}}{\frac{y}{2xyz\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}} = \frac{z}{xy^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

de donde obtenemos  $2x^2 = y^2$  y  $y^2 = 2z^2$ , es decir  $x = \pm z$  y  $y^2 = 2z^2$ .

Sustituyendo en la ecuación (E4) nos queda  $z \cdot 2z^2 \cdot z = 2z^4 = 32$ , es decir  $z = \pm 2$ .

Finalmente, como  $y^2 > 0$  y como  $xy^2z = 32$  entonces  $x$  y  $z$  deben tener el mismo signo, es decir,  $x = z$  y  $y = \pm\sqrt{2}z$ . Tenemos solo cuatro posibles soluciones,

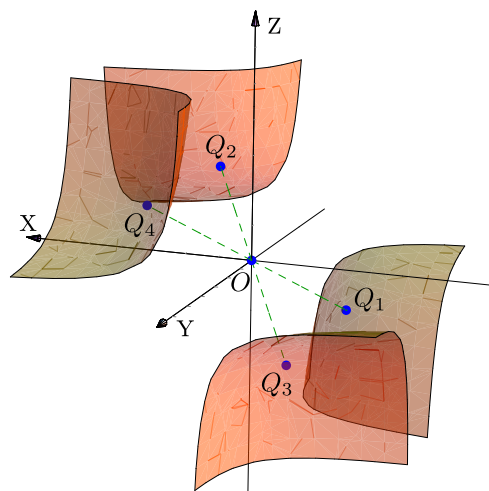
$$Q_1 = (-2, -2\sqrt{2}, 2); \quad \lambda = 1/8,$$

$$Q_2 = (2, -2\sqrt{2}, 2); \quad \lambda = 1/8,$$

$$Q_3 = (-2, 2\sqrt{2}, -2); \quad \lambda = 1/8,$$

$$Q_4 = (-2, 2\sqrt{2}, -2); \quad \lambda = 1/8.$$

Como  $d(Q_1, O) = d(Q_2, O) = d(Q_3, O) = d(Q_4, O)$ , los cuatro puntos son los puntos de  $S$  más cercanos al origen.



**4.14** Problema: “Minimizar  $A = 3\pi r^2 + 2\pi r h$  sujeto a la restricción  $V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = 400$ ”

La altura total es  $h + r \approx 8.49\text{m}$  y el diámetro es  $d \approx 8.49\text{m}$

**4.15** Problema: “Maximizar  $\rho = 2 + xz + y^2$  sujeto a la restricción  $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ ”

Hay cuatro puntos críticos:  $(0, \pm 2, 0)$ ,  $(\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$ ,  $(\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$ . Evaluando  $\rho$  en los seis puntos encontramos que  $\rho$  es máximo en los puntos  $(0, \pm 2, 0)$  y mínimo en los puntos  $(\pm\sqrt{2}, 0, \mp\sqrt{2})$ .

**4.16**  $x = 3/2$ ,  $y = 3/2$ ,  $\lambda = -3$ .

**4.17**

**4.18**  $\lambda = 0$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$ ,

$\lambda = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,

$\lambda = 0$ ,  $y = -1$ ,  $x = 0$ ,

$\lambda = 0$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ ,

$\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**4.19**  $(\pm\sqrt{2}, 1)$  y  $\lambda = 1$ . Observe que  $x = 0$  no satisface la restricción.

**4.20**

**4.21**

4.22

4.23

4.24

4.25

4.26

4.27

4.28

4.29

4.30

4.31  $x = \pm 1/3$ ,  $y = \pm 3$ ,  $z = \pm 4/3$ ,  $w_{max} = 2\sqrt{3}/3$ 

4.32

4.33

4.34

4.35

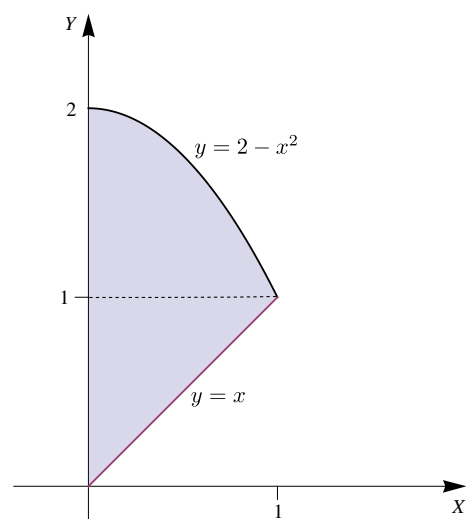
4.36

4.37

## Soluciones del Capítulo 5

5.1

$$A_R = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} dy dx = 7/6$$



## 5.2

5.3 Cuidado, debe escoger la rama correcta en cada parábola.

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_{-2+\sqrt{2-y}}^{3-\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{-2}^{-2+\sqrt{2}} \int_{2-(x+2)^2}^2 f(x, y) dy dx + \int_{-2+\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}} \int_0^2 f(x, y) dy dx + \int_{3-\sqrt{2}}^3 \int_0^{(x-3)^2} f(x, y) dy dx$$

5.4 Cuidado, debe tener el cuidado de escoger la rama correcta en la parábola y el signo correcto en la elipse.

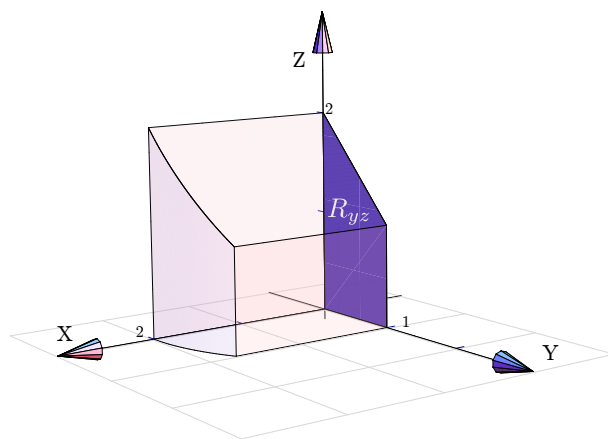
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{-2}^0 \int_{2-(x+2)^2}^{x+4} f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_{x-2}^{4-2\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x, y) dy dx$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{-2}^0 \int_{-2+\sqrt{2-y}}^{y+2} f(x, y) dx dy + \int_0^2 \int_{-2+\sqrt{2-y}}^{\frac{1}{2}(4-\sqrt{8y-y^2})} f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_{y-4}^{\frac{1}{2}(4-\sqrt{8y-y^2})} f(x, y) dx dy$$

5.5 El cálculo es fácil proyectando sobre  $XY$  o  $YZ$ .

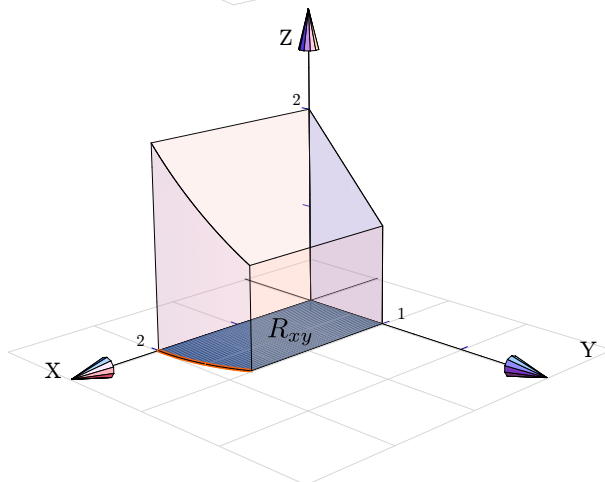
Proyección sobre  $YZ$ .

$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{2-y} \left[ \sqrt{4-y^2} - 0 \right] dz dy$$



Proyección sobre  $XY$ .

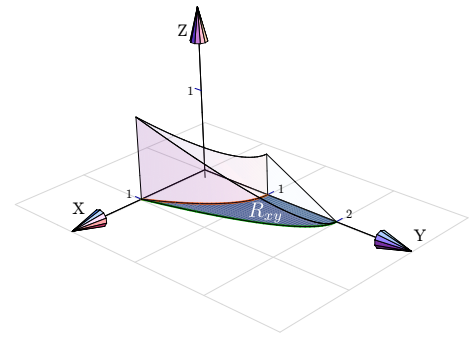
$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} [2-y-0] dx dy$$



Proyectando sobre  $XY$ .

5.6

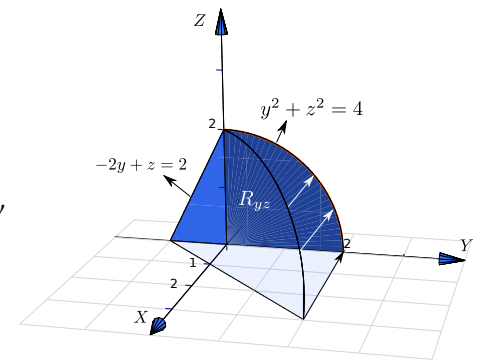
$$V_Q = \int_0^1 \int_{1-x^2}^{2-2x^2} [1 - y/2 - 0] dy dx$$



Proyectamos sobre  $YZ$ .

5.7

$$V_Q = \int_{-1}^0 \int_0^{2+2y} [1 - z/2 + y - 0] dz dy + \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} [1 - z/2 + y - 0] dz dy$$



5.8 Proyectamos sobre  $XY$ .

$$V = \int_0^{1/\sqrt{8}} \int_{\sqrt{1/4-x^2}}^{\sqrt{3/4-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{(x^2+y^2)/3} dy dx + \int_{1/\sqrt{8}}^{\sqrt{3/8}} \int_x^{\sqrt{3/4-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{(x^2+y^2)/3} dy dx$$

5.9

5.10

5.11

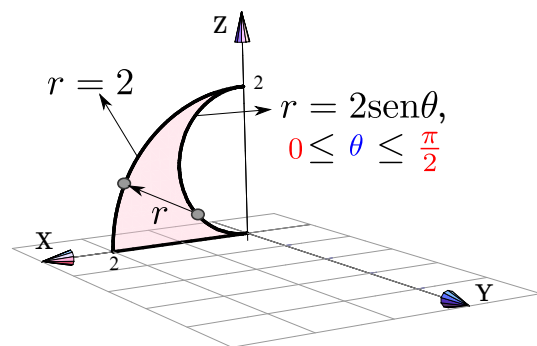
5.12

5.13

**Solución:** La manera fácil es proyectar sobre  $XZ$  y usar coordenadas polares,

5.14

$$\begin{aligned} V_Q &= \iint_{R_{xz}} 4 - x dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{2\sin\theta}^2 (4 - r\cos\theta) \cdot r dr d\theta \\ &= 2\pi - 2 \end{aligned}$$



5.15 Proyectar sobre  $XZ$  y usar coordenadas polares

$$5.16 \quad V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2})$$

5.17

$$5.18 \quad I = 3/4(e - e^{-1}).$$

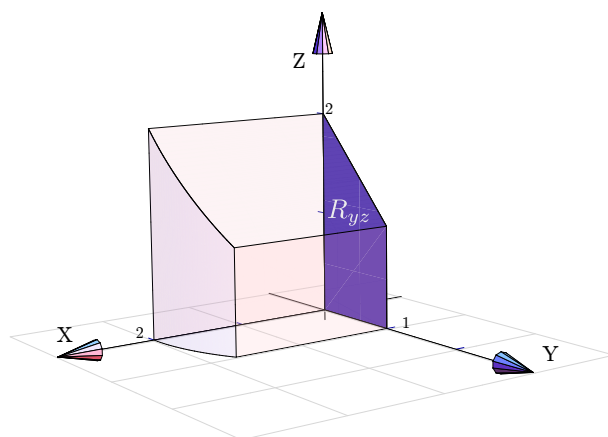
5.19

5.20

5.21 El cálculo es fácil proyectando sobre  $XY$  o  $YZ$ .

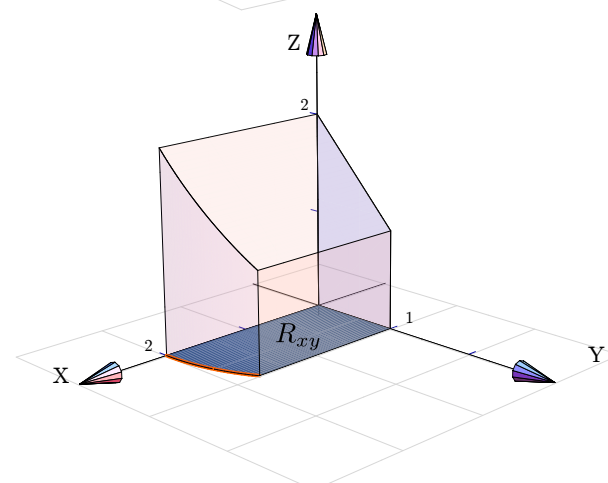
**Proyección sobre  $YZ$ .**

$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{2-y} \left[ \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \right] dz dy$$



**Proyección sobre  $XY$ .**

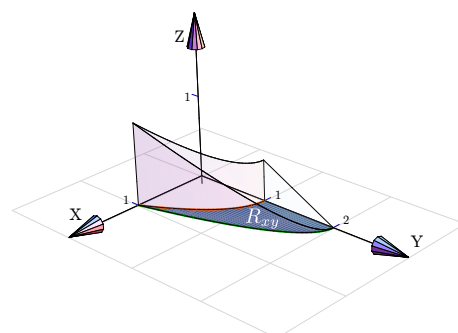
$$V_Q = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \left[ \int_0^{2-y} dz \right] dx dy$$



**Proyectando sobre  $XY$ .**

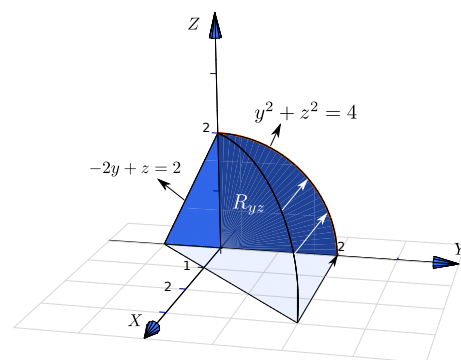
5.22

$$V_Q = \int_0^1 \int_{1-x^2}^{2-2x^2} \left[ \int_0^{1-y/2} dz \right] dy dx$$



Proyectamos sobre  $YZ$ .

$$5.23 \quad V_Q = \int_{-1}^0 \int_0^{2+2y} \left[ \int_0^{1-z/2+y} dx \right] dz dy + \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \left[ \int_0^{1-z/2+y} dx \right] dz dy$$



$$5.24 \quad V_C = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{h-hr/a} r dz dr d\theta = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

$$5.25 \quad V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2})$$

$$5.26 \quad V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi \left( \frac{8}{3} - \sqrt{3} \right)$$

$$5.27 \quad \frac{8\pi^2}{3} - 2\sqrt{3}\pi.$$

$$5.28 \quad \iiint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}} dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_1^4 \frac{r}{r+1} d\mathbf{y} dr d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \int_{r^2}^4 \frac{r}{r+1} d\mathbf{y} dr d\theta. \text{ Para terminar el cálculo, observe que (dividiendo) } \frac{r}{r+1} = 1 - \frac{1}{r+1} \text{ y que } \frac{r^3}{r+1} = r^2 - r + 1 - \frac{1}{r+1}.$$

5.29 La proyección sobre  $XY$  es la región limitada por la recta  $x + y = 2$  en el primer cuadrante.

$$V_Q = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{\sqrt{4-x^2}}^4 dz dy dx.$$

5.30

$$5.31 \quad V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2})$$

5.32 Como  $z = \rho \cos \varphi = h$ , entonces el sólido se puede describir en coordenadas polares como

$$0 \leq \rho \leq \frac{h}{\cos \varphi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi \leq \arctan(a/h).$$

Esta integral es sencilla (aunque no parece). Recuerde que  $\cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$ , con esto la integral simplifica muy bien.

$$V_C = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan(a/h)} \int_0^{h/\cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \frac{\pi a^2 h}{3}$$



## 5.33

5.34 Como  $z = a - h$  entonces  $\rho \cos \varphi = a - h$ . Así  $Q$  se describe en coordenadas esféricas como

$$\frac{a-h}{\cos \varphi} \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2 - \arcsen\left(\frac{a-h}{a}\right).$$

$$\begin{aligned} \iiint_Q dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2 - \arcsen(\frac{a-h}{a})} \int_{\frac{a-h}{\cos \varphi}}^a \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2 - \arcsen(\frac{a-h}{a})} \left. \frac{\rho^3 \sin \varphi}{3} \right|_{\frac{a-h}{\cos \varphi}}^a d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2 - \arcsen(\frac{a-h}{a})} \frac{1}{3} [a^3 \sin \varphi - (a-h)^3 \sec^3 \varphi \sin \varphi] \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \left[ -a^3 \cos \varphi - (a-h)^3 \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} \right] \Big|_0^{\pi/2 - \arcsen(\frac{a-h}{a})} d\theta \quad \text{pues} \quad \int \sec^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\sec^2 \varphi}{2} + K \quad (\text{sustitución}). \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \left[ \frac{3ah^2 - h^3}{2} \right] d\theta \quad \text{pues} \quad \cos\left(\pi/2 - \arcsen\left(\frac{a-h}{a}\right)\right) = \frac{a-h}{a}. \\ &= \frac{\pi}{3} (3ah^2 - h^3) \end{aligned}$$

## 5.35

## 5.36

5.37  $2a^2\pi$

## Soluciones del Capítulo 6

6.1 Vamos a proyectar sobre el plano  $xy$ . Como se ve en la figura, la proyección está entre los círculos  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 = 2$  con  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ . Entonces

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_1^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta, \quad (\text{sustitución: } u = 4r^2 + 1) \\ &= \frac{(-5\sqrt{5} + 17\sqrt{17})\pi}{48} \end{aligned}$$

$$6.2 \quad dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dA$$

$$A_S = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} r \, dr \, d\theta = \pi \sqrt{2}.$$

6.3

6.4

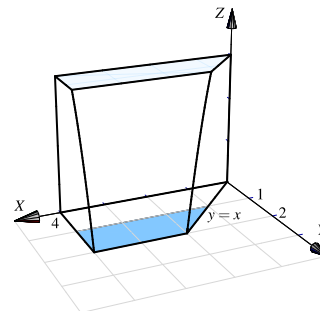
$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS = \int_0^2 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 1} \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 x \sqrt{4x^2 + 1} \, dx \\ &= \int_1^{17} \sqrt{u} \frac{du}{8} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{12} \Big|_1^{17} = 5,7577 \end{aligned}$$

6.5 Proyectamos sobre  $XY$ 

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_S dS \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_1^{\sqrt{3}} d\theta = \frac{\pi}{48} (13\sqrt{13} - 5\sqrt{5}) \end{aligned}$$

6.6 Proyectamos sobre  $XY$ .

$$\begin{aligned} \iint_S (2xy + z + 1) \, dS &= \int_1^2 \int_y^4 (2xy + z + 1) \, dx \, dy \\ &= \int_1^2 \int_y^4 (2xy + 4 - y^2 + 1) \, dx \, dy \end{aligned}$$



6.7

6.8

6.9

6.10

6.11 Vamos a proyectar sobre el plano  $XY$ . La proyección es el círculo  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

• Como  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  entonces podemos poner  $\mathbf{N} = \frac{(-x/z, -y/z, 1)}{\|(-x/z, -y/z, 1)\|}$ . Luego,

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_{S_1} (y, -x, 8z) \cdot \frac{(-x/z, -y/z, 1)}{\|(-x/z, -y/z, 1)\|} \|(-x/z, -y/z, 1)\| dA \\
 &= \iint_D 8z dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 8\sqrt{9-r^2} r dr d\theta \\
 &= \frac{16\pi(5^{3/2} - 9^{3/2})}{-3}
 \end{aligned}$$

6.12 •  $\text{div} \mathbf{F} = y^2 + z^2$

• La proyección es el círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iiint_Q \text{div} \mathbf{F} dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 r^2 r dr d\theta \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

6.13

6.14

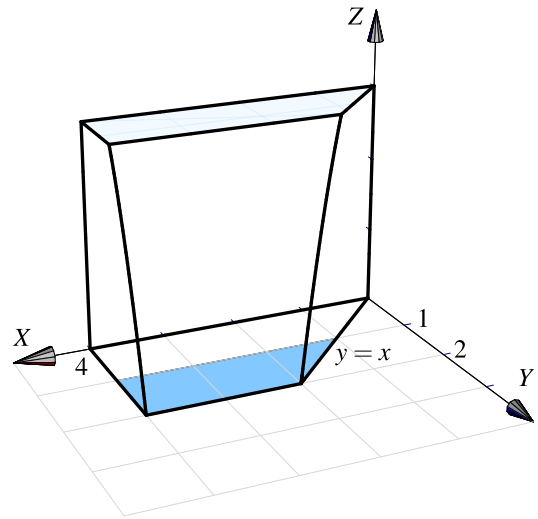
$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \int_1^3 \int_0^3 (0, x+y, 1-(x-2)^3) \cdot (-3(x-2)^2, 0, 1) dy dx \\
 &= \int_1^3 \int_0^3 (1-(x-2)^3) dy dx \\
 &= \int_1^3 \int_0^3 (-x^3 + 6x^2 - 12x + 9) dy dx \\
 &= 3 \int_1^3 (-x^3 + 6x^2 - 12x + 9) dx = 3 \left( -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 6x^2 + 9x \right) \Big|_1^3 = 6
 \end{aligned}$$

6.15 Proyectamos sobre  $XY$

$$\begin{aligned}
 A_S &= \iint_S dS \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+4r^2} \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{12} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+4r^2)^{3/2} \Big|_1^{\sqrt{3}} d\theta = \frac{\pi}{48} (13\sqrt{13} - 5\sqrt{5})
 \end{aligned}$$

6.16 Proyectamos sobre  $XY$ .

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_1^2 \int_y^4 (xy, x, z+1) \cdot (0, 2y, 1) \, dx \, dy \\
 &= \int_1^2 \int_y^4 (2xy + z + 1) \, dx \, dy \\
 &= \int_1^2 \int_y^4 (2xy + 4 - y^2 + 1) \, dx \, dy
 \end{aligned}$$



6.17 Se puede aplicar el teorema de divergencia.  $\text{Div } F = 1 - 1 + 2 = 2$ .

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{3-x} 2 \, dy \, dz \, dx \\
 &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} (6-2x) \, dz \, dx \\
 &= \int_0^2 (6-2x)(4-x^2) \, dx \\
 &= \int_0^2 (2x^3 - 6x^2 - 8x + 24) \, dx \\
 &= \left( \frac{x^4}{2} - 2x^3 - 4x^2 + 24x \right) \Big|_0^2 = 8 - 16 - 16 + 48 = 24
 \end{aligned}$$

6.18

---

**6.19** •  $\operatorname{div} \mathbf{F} = y^2 + z^2$

• La proyección es el círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 r^2 r dr d\theta \\ &= \pi\end{aligned}$$

**6.20**

**6.21**

**6.22**

**6.23**